الرياضيات البحتة

الجزء الخاص بالإجابات

القسم العلمي

الفصل الدراسي الأول



المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

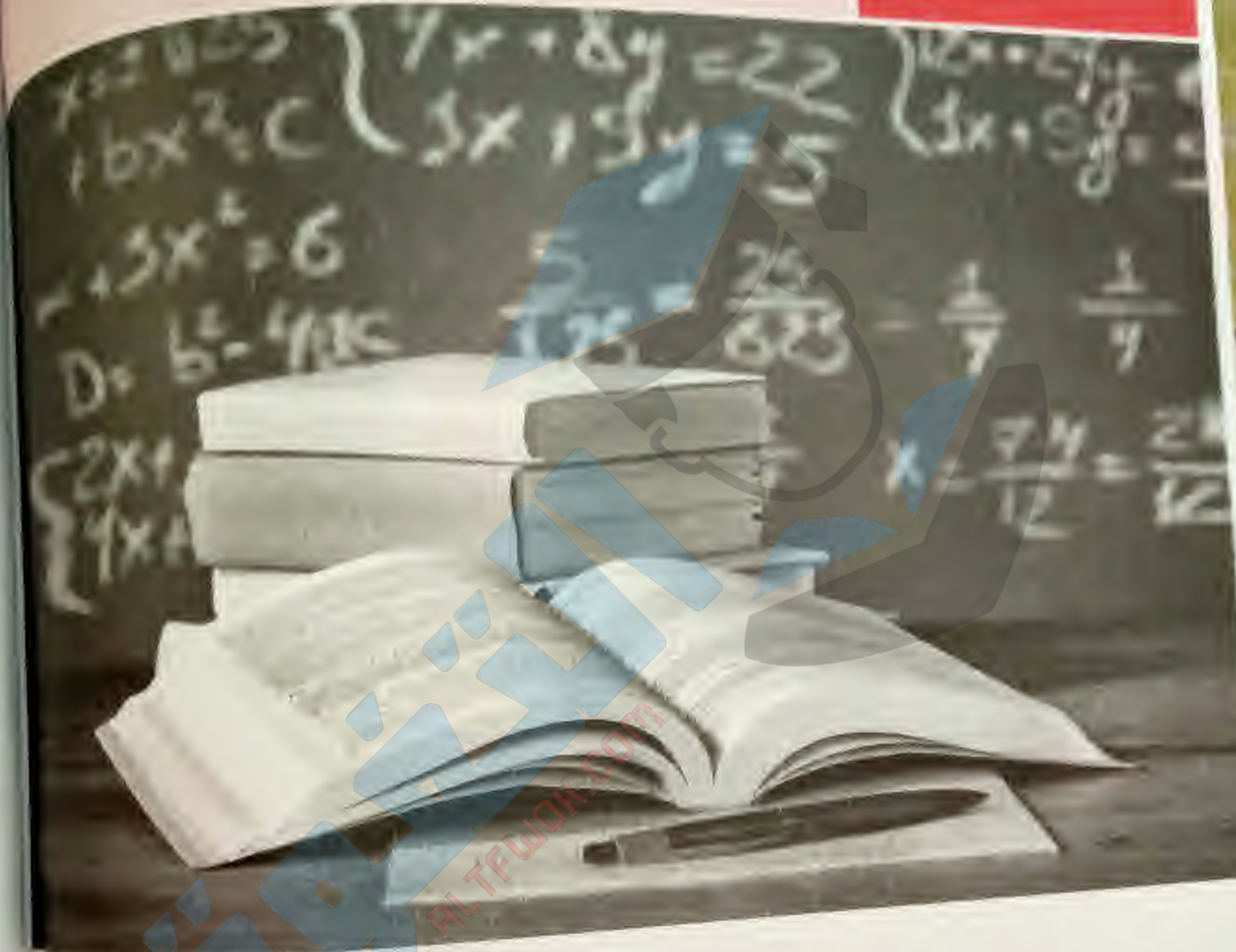
2

ثانوي

2021

إجابات
تمارين

الجبر



إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين المتطلبات القبلية

١

① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ)
⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (ب)

٢

∵ د(س) = أ² س² + ١٠ أ س + ٢٥
، ر(س) = ٩ س² + ٣٠ س + جـ − ٤
، د(س) = ر(س)
∴ ١٠ أ = ٣٠ ∴ أ = ٣
، جـ − ٤ = ٢٥ ∴ جـ = ٢٩

٣

① ∵ أ + ب = ٥ (١) ، أ + جـ = ٣ (٢)
، ب = −٢ وبالتعويض عن قيمة ب في (١)
∴ أ − ٢ = ٥
∴ أ = ٧ وبالتعويض عن قيمة أ في (٢)
∴ ٧ + جـ = ٣ ∴ جـ = −٤

② ∵ أ + ب = ١ (١) ، ٢أ + جـ = ٠ (٢)
، ب = −٢ ∴ أ − ٢ = ١ ∴ أ = ٣
، ٢ + جـ = ٠ ∴ جـ = −٢

③ ∵ أ + ٢ ب = ٧ (١)
، − جـ = ٥ ∴ جـ = −٥ ، أ − ب = ٤ (٢)
من (١) ، (٢)
∴ ب = ١ ، أ = ٥

إجابات تمارين ١

١

① دالة ② ليست دالة ③ دالة
④ ليست دالة ⑤ دالة ⑥ ليست دالة
⑦ دالة ⑧ ليست دالة ⑨ دالة
⑩ دالة

٢

① دالة ② ليست دالة ③ ليست دالة
④ دالة ⑤ ليست دالة ⑥ دالة

٣

① ح − {٢} ② ح − {−٣ ، ٣}
③ ح − {١ ، ٢} ④ ح − {٠ ، −٤}
⑤ ح − {٠} ⑥ ح
⑦ ح − {٠ ، ١ ، −١} ⑧ ح − {٣}
⑨ ح − {١ ، $\frac{٢}{٣}$} ⑩ ح − {−١}

٤

① [٣ ، ∞[②]−∞ ، ٢] ③ ح
④ ح ⑤ ح − {$\frac{٥}{٢}$} ⑥]٣ ، ∞[
⑦]−∞ ، ١] ⑧ ح −]−٤ ، ٤[
⑨ [−٢ ، ٢] ⑩]−٣ ، ٣[⑪ ح
⑫ ح − [−١ ، ١] ⑬ ح − {٢}
⑭ [٠ ، ∞[− {١}

٥

① ح − {٢} ② ح ③ [٠ ، ٢]
④]−∞ ، ٤] ⑤ [٠ ، ١]

٦

① (جـ) ② (د) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (جـ)

٧

① المجال = ح ، المدى = {٢}
، الدالة ثابتة على مجالها ح

② المجال = ح ، المدى = {−٢ ، ٢}
، الدالة ثابتة في]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

③ المجال = ح − {٠} ، المدى = ح − [−٢ ، ٢]
، الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

④ المجال = ح − {١} ، المدى =]−٢ ، ∞[
، الدالة تناقصية في]−∞ ، ١[
، تزايدية في]١ ، ∞[

⑤ المجال = ح − {٢} ، والمدى = ح − {٢}
، الدالة تزايدية في]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

⑥ المجال = [٠ ، ∞[، المدى = [٠ ، ٤]
، الدالة تزايدية في]٠ ، ٢[، ثابتة في]٢ ، ∞[

⑦ المجال = ح − {−١ ، ٢} ، المدى = {٣}
، الدالة ثابتة على مجالها.

⑧ المجال = [−٣ ، ٤] ، المدى = [٠ ، ٤]
، الدالة تزايدية في]−٣ ، −٢[
، وثابتة في]−٢ ، ١[وتناقصية في]١ ، ٤[

⑨ المجال = ح −]٠ ، ١[
، المدى =]٣ ، ∞[∪ {٢} ، الدالة ثابتة في]−∞ ، ٠[وتزايدية في]١ ، ∞[

⑩ المجال = ح ، المدى =]−∞ ، ٢]
، الدالة تزايدية في]−∞ ، ٠[،]٢ ، ٣[
وتناقصية في]٠ ، ٢[وثابتة في]٣ ، ∞[

⑪ المجال = ح ، المدى =]−∞ ، ٤]
، الدالة تزايدية في]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[
وتناقصية في]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

⑫ المجال = ح − {٠} ، المدى = ح
، الدالة تزايدية في]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

⑬ المجال = ح ، المدى = ح −]١ ، ٢[
، الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[،]١ ، ∞[
وتزايدية في]٠ ، ١[

⑭ المجال = ح − {٠} ، المدى = ح − [−٢ ، ٢]
، الدالة تزايدية في]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

⑮ المجال = [−٢ ، ∞[، المدى = [٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية في]−٢ ، ٠[
وتناقصية في]٠ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٨

① (د) ② (د) ③ (د)
④ (جـ) ⑤ (أ) ⑥ (د)

إرشادات لحل رقم ٨

① ∵ س تدل على عدد أضلاع مضلع
∴ س عدد صحيح أكبر من ٢
∴ المجال = ص⁺ − {١ ، ٢}

② بوضع $\sqrt[٣]{س}$ − ٢ = ٠
∴ $\sqrt[٣]{س}$ = ٢ ∴ س = ٨
∴ المجال = ح − {٨}

③ ∵ ٢س ≥ ٠ ∴ س ≥ ٠
∴ س ∈ [٠ ، ∞[
بوضع $\sqrt{٢س}$ − س = ٠ ∴ $\sqrt{٢س}$ = س
∴ ٢ س = س² ∴ س² − ٢ س = ٠
∴ س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٣

∴ المجال =]٠ ، ∞[− {٣}

④ ∵ س − ١ ≥ ٠ ∴ س ≥ ١

∴ س ∈ [١ ، ∞[

وبوضع $\sqrt{س - ١} = ٣$ ∴ س − ١ = ٩

∴ س = ١٠

∴ المجال = [١ ، ∞[− {١٠}

⑤ ∵ س − ١ ≥ ٠ ∴ س ≥ ١

∴ س ∈ [١ ، ∞[

وبوضع $\sqrt{س - ١} + ٢ = ٠$ (تعارض)

∴ المجال = [١ ، ∞[

⑥ ∵ د(س) = $\sqrt{-(س^٢ - ٦س + ٩)}$

= $\sqrt{-(س - ٣)^٢}$

∴ $-(س - ٣)^٢ \geq ٠$ ∴ $(س - ٣)^٢ \leq ٠$

وهذا لا يتحقق إلا فى حالة التساوى فقط

أى عندما س = ٣ ∴ المجال = {٣}

إجابات تمارين 2

١

① (د + ر)(س) = $س^٢ - ١٦$

، المجال = [−٤ ، ٨] ∩ [−٧ ، ٤] = [−٤ ، ٤]

② (د − ر)(س) = $س^٢ - ٢س - ٨$

، المجال = [−٤ ، ٤]

③ (د · ر)(س) = (س − ٤)($س^٢ - س - ١٢$)

، المجال = [−٤ ، ٤]

④ $\left(\frac{د}{ر}\right)$(س) = $\frac{س^٢ - س - ١٢}{س - ٤}$ = $\frac{(س - ٤)(س + ٣)}{(س - ٤)}$ = س + ٣

، المجال = [−٤ ، ٤[

⑤ $\left(\frac{ر}{د}\right)$(س) = $\frac{س - ٤}{(س - ٤)(س + ٣)}$ = $\frac{١}{س + ٣}$

، المجال =]−٤ ، ٤[− {−٣}

٢

د(س) = $س^٢ - ٤$ ومجال د = ح

، ر(س) = $\sqrt{س - ١}$ ومجال ر = [١ ، ∞[

∴ المجال المشترك = [١ ، ∞[

① (د + ر)(س) = $س^٢ - ٤ + \sqrt{س - ١}$

، المجال = [١ ، ∞[

، (د · ر)(س) = $(س^٢ - ٤)(\sqrt{س - ١})$

، المجال = [١ ، ∞[

، $\left(\frac{د}{ر}\right)$(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{\sqrt{س - ١}}$ ، المجال =]١ ، ∞[

، $\left(\frac{ر}{د}\right)$(س) = $\frac{\sqrt{س - ١}}{س^٢ - ٤}$

، المجال = [١ ، ∞[− {٢}

② (د + ر)(٥) = $٥^٢ - ٤ + \sqrt{٥ - ١}$ = ٢٣

، (د · ر)(٢) = $(٢^٢ - ٤)(\sqrt{٢ - ١})$ = صفر

، $\left(\frac{د}{ر}\right)$(٣) = $\frac{٣^٢ - ٤}{\sqrt{٣ - ١}}$ = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$

، $\left(\frac{ر}{د}\right)$(−٢) غير معرفة

لأن −٢ ∉ المجال

٣

أولاً :

① (د + ر)(س) = $س^٢ - ٤س + \sqrt{س + ٢}$

، المجال = ح ∩ [−٢ ، ∞[= [−٢ ، ∞[

② (ر − ع)(س) = $\sqrt{س + ٢} - \sqrt{٤ - س}$

، المجال = [−٢ ، ∞[∩]−∞ ، ٤] = [−٢ ، ٤]

③ (د · ع)(س) = $(س^٢ - ٤س)(\sqrt{٤ - س})$

، المجال = ح ∩]−∞ ، ٤] =]−∞ ، ٤]

④ $\left(\frac{ع}{د}\right)$(س) = $\frac{\sqrt{٤ - س}}{س^٢ - ٤س}$ = $\frac{\sqrt{٤ - س}}{س(س - ٤)}$

، المجال =]−∞ ، ٤[− {٠}

ثانيًا :

① (ر − ع)(١) = $\sqrt{١ + ٢} - \sqrt{٤ - ١}$ = صفر

② (د · ع)(٥) غير معرفة لأن ٥ ∉ المجال

③ $\left(\frac{ع}{د}\right)$(٣) = $\frac{\sqrt{٤ - ٣}}{٣^٢ - ٤ \times ٣}$ = $-\frac{١}{٣}$

٤

① ح − {٠ ، −٢}

② ح − {−١ ، ١}

③]−∞ ، ١[

④]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

⑤ [١ ، ∞[

⑥ [−٢ ، ٢]

⑦ [٢ ، ∞[

⑧ [٤ ، ∞[− {٦}

⑨ ح − {١}

⑩ [٢ ، ∞[

⑪]٥ ، ∞[

⑫ [٢ ، ٥[

٥

① (ب) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ)

⑤ (د) ⑥ (ب) ⑦ (ب)

٦

① (د · ر)(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٢س & ، س \geq ٢ \\ -س^٢ + ٢س & ، س < ٢ \end{cases}$

، والمجال = ح

② $\left(\frac{د}{ر}\right)$(س) = $\begin{cases} ١ - \frac{٢}{س} & ، س \geq ٢ \\ -١ + \frac{٢}{س} & ، س < ٢ ، س \neq ٠ \end{cases}$

، والمجال = ح − {٠}

③ $\left(\frac{ر}{د}\right)$(س) = $\begin{cases} \frac{س}{س - ٢} & ، س > ٢ \\ \frac{س}{٢ - س} & ، س < ٢ \end{cases}$

، والمجال = ح − {٢}

٧

① ح −]٣ ، ٥]

② [٢ ، ∞[− {٣}

③]−٢ ، ∞[− {٧ ، −١}

④ ح − {١ ، ٢ ، $\frac{٧}{٢}$}

٨

① (د ∘ ر)(٢) = د(ر(٢)) = د($٢^٢$ − ٥)

= د(−١) = ٣ × (−١) + ١ = −٢

② (ر ∘ د)(−٢) = ر(د(−٢)) = ر(٣(−٢) + ١)

= ر(−٨) = $(-٨)^٢$ − ٥ = ٥٩

③ (ر ∘ ر)(١) = ر(ر(١)) = ر($١^٢$)

= ر(١) = $١^٢$ − ٥ = −٤

④ (ر ∘ د)(−٢) = ر(د(−٢)) = ر(٣(−٢) + ١)

= ر(−٥) = $(-٥)^٢$ = −١٢٥

٩

① (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(س + ٣) = $\frac{١}{س + ٣}$

∵ م₁ = مجال ر = ح

، قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د

هى م₂ = ح − {−٣}

∴ مجال (د ∘ ر) = م₁ ∩ م₂ = ح − {−٣}

② (ر ∘ د)(س) = ر(د(س)) = ر($\frac{١}{س}$)

= $\frac{١}{س}$ + ٣

∵ م₁ = مجال د = ح − {٠}

، قيم س التى تجعل د(س) فى مجال ر

هى م₂ = ح − {٠}

∴ مجال (ر ∘ د) = م₁ ∩ م₂ = ح − {٠}

١٠

① $(د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = د(س^{٢}) = \frac{١}{س^{٢} - ١}$

، ∵ $م_{١}$ = مجال ر = ح

، قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي

$م_{٢} = ح - \{-١ ، ١\}$

∴ مجال $(د \circ ر) = م_{١} \cap م_{٢} = ح - \{-١ ، ١\}$

② $(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر\left(\frac{١}{س - ١}\right) = \left(\frac{١}{س - ١}\right)^{٢}$

$= \frac{١}{س^{٢} - ٢س + ١}$

، ∵ $م_{١}$ = مجال د = ح - {١}

، قيم س التي تجعل د (س) في مجال ر هي

$م_{٢} = ح - \{١\}$

∴ مجال $(ر \circ د) = م_{١} \cap م_{٢} = ح - \{١\}$

١١

① ∵ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د(٣س) = (٣س)^{٢} + ٦$

$= ٩س^{٢} + ٦$

∴ $(د \circ ر)(٣) = ٩ \times ٣^{٢} + ٦ = ٨٧$

② ∵ $٩س^{٢} + ٦ = ٤٢$ ∴ $٩س^{٢} = ٣٦$

∴ $س^{٢} = ٤$ ∴ $س = \pm ٢$

١٢

① (جـ) ② (أ) ③ (ب)

④ (د) ⑤ (ب)

١٣

∵ $(د \circ ر)(س)$

$= د(ر(س)) = د(\sqrt{س - ٢})$

$= (\sqrt{س - ٢})^{٢} - ٣ = س - ٢ - ٣ = س - ٥$

، ∵ $م_{١}$ = مجال ر = [٢ ، ∞[

، قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي $م_{٢}$ = ح

∴ مجال $(د \circ ر) = م_{١} \cap م_{٢}$ = [٢ ، ∞[

، $(د \circ ر)(٣) = ٣ - ٥ = -٢$

١٤

∵ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د\left(\frac{٢}{س - ٢}\right) = \sqrt{\frac{٢}{س - ٢} + ١}$

$= \sqrt{\frac{س - ١}{س - ٢}}$

، ∵ $م_{١}$ = مجال ر = ح - {٢}

، بوضع $\frac{س - ١}{س - ٢} \geq ٠$

∴ قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي $م_{٢}$

= ح -]١ ، ٢]

∴ مجال $(د \circ ر) = م_{١} \cap م_{٢}$ = ح -]١ ، ٢]

١٥

① ∵ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د(\sqrt{٤ - س})$

$= \sqrt{\sqrt{٤ - س} - ٢}$

، ∵ $م_{١}$ = مجال ر =]-∞ ، ٤]

، بوضع $\sqrt{٤ - س} - ٢ \geq ٠$

أي $\sqrt{٤ - س} \geq ٢$

أي $٤ - س \geq ٤$ أي $س \leq ٠$

∴ قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي

$م_{٢}$ =]-∞ ، ٠]

∴ مجال $(د \circ ر) = م_{١} \cap م_{٢}$ =]-∞ ، ٠]

② ∵ $(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر(\sqrt{س - ٢})$

$= \sqrt{٤ - \sqrt{س - ٢}}$

، ∵ $م_{١}$ = مجال د = [٢ ، ∞[

، بوضع $٤ - \sqrt{س - ٢} \geq ٠$

∴ $\sqrt{س - ٢} \leq ٤$

∴ $س - ٢ \leq ١٦$ ∴ $س \leq ١٨$

∴ قيم س التي تجعل د (س) في مجال ر هي $م_{٢}$

=]-∞ ، ١٨]

∴ مجال $(ر \circ د) = م_{١} \cap م_{٢}$ = [٢ ، ١٨]

١٦

① ∵ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د(\sqrt{س^{٢} - ٤})$

$= \sqrt{\sqrt{س^{٢} - ٤} - ١}$

، بوضع $س^{٢} - ٤ \geq ٠$

∴ $م_{١}$ = مجال ر = ح -]-٢ ، ٢[

وبوضع $\sqrt{س^{٢} - ٤} - ١ \geq ٠$

أي $\sqrt{س^{٢} - ٤} \geq ١$ أي $س^{٢} - ٤ \geq ١$

أي $س^{٢} - ٥ \geq ٠$

، قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي

$م_{٢} = ح -]-\sqrt{٥} ، \sqrt{٥}[$

∴ مجال $(د \circ ر) = م_{١} \cap م_{٢}$

$= ح -]-\sqrt{٥} ، \sqrt{٥}[$

② ∵ $(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر(\sqrt{س - ١})$

$= \sqrt{(\sqrt{س - ١})^{٢} - ٤}$

$= \sqrt{س - ١ - ٤} = \sqrt{س - ٥}$

، ∵ $م_{١}$ = مجال د = [١ ، ∞[

، قيم س التي تجعل د (س) في مجال ر هي

$م_{٢}$ = [٥ ، ∞[

∴ مجال $(ر \circ د) = م_{١} \cap م_{٢}$ = [٥ ، ∞[

١٧

$د(س) = \sqrt{س - ٤}$ ، $ر(س) = س^{٢}$

(توجد حلول أخرى)

١٨

بفرض د (س) = أ س + ب

، ∵ $(د \circ د)(س) = ١٦س + ١٥$

∴ $د(د(س)) = ١٦س + ١٥$

∴ $د(أس + ب) = ١٦س + ١٥$

∴ $أ(أس + ب) + ب = ١٦س + ١٥$

∴ $أ^{٢}س + أب + ب = ١٦س + ١٥$

∴ $أ^{٢} = ١٦$ ومنها $أ = \pm ٤$

، $أب + ب = ١٥$ ∴ $ب = \frac{١٥}{أ + ١}$

، عند أ = ٤ ∴ ب = ٣

، عند أ = -٤ ∴ ب = -٥

∴ د (س) = ٤ س + ٣

أو د (س) = -٤ س - ٥

١٩

① (د) ② (د) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

⑥ (د) ⑦ (أ) ⑧ (د) ⑨ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٩

① ∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر =]−∞ ، ١]

∴ مجال (د + ر) = [١ ، ∞[∩]−∞ ، ١]

= {١}

② عندما ٠ < س < ١

(د + ر) (س) = د (س) + ر (س)

= (−س + ٢) + (س + ٢) = ٤

③ (ر ∘ د) (−١) = ر (د (−١))

[لاحظ أن د (−١) = (−١)^{٢} + ١ = ٢]

= ر (٢)

= (٢)^{٢} + ٢ = ٦

④ ∵ د (ر (س)) = د (س)

∴ د (٢ س + ٣) = د (س)

∴ (٢ س + ٣)^{٢} = س^{٢}

∴ ٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩ − س^{٢} = ٠

∴ ٣ س^{٢} + ١٢ س + ٩ = ٠

∴ س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠

∴ (س + ١) (س + ٣) = ٠

∴ س = −١ أو س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

⑤ ∵ (د ∘ ر) (س) = ٣ س + ٢

∴ د (ر (س)) = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر (س) + ١ = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر (س) = ٣ س + ١

∴ ر (س) = $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$

⑥ ∵ (ر ∘ د) (س) = س + ٢

∴ ر (د (س)) = س + ٢

∴ ر (٢ س − ٣) = س + ٢

وبوضع ٢ س − ٣ = ص

∴ س = $\frac{ص + ٣}{٢}$

∴ ر (ص) = $\frac{ص + ٣}{٢}$ + ٢ = $\frac{ص + ٧}{٢}$

∴ ر (س) = $\frac{س + ٧}{٢}$

⑦ ∵ (ر ∘ د) (٠) = (د ∘ ر) (١)

∴ ر [د (٠)] = د [ر (١)]

لاحظ أن : د (٠) = ٢ ، ر (١) = $\frac{١ - ك}{٢}$

∴ ر (٢) = د ($\frac{١ - ك}{٢}$)

∴ $\frac{٢ - ك}{٥}$ = $\frac{١ - ك}{٢}$ + ٢

∴ ٤ − ٢ ك = ٥ − ٥ ك + ٢٠

∴ ٣ ك = ٢١ ∴ ك = ٧

⑧ ∵ (د ∘ د ∘ د) (١)

= د (د [د (١)]) [من الرسم د (١) = ٥]

= د (د (٥)) [من الرسم د (٥) = صفر]

= د (صفر) [من الرسم د (٠) = ٢]

= ٢

⑨ (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨)

= د (ت (٣)) − د (ت (٨))

= د (٢) − د (٤)

= ٤ − ٨ = −٤

٢٠

① (د ∘ د) (س) = د (د (س)) = د ($\frac{١}{س}$)

= ١ ÷ $\frac{١}{س}$ = س

② (د ∘ د ∘ د) (س) = د (د (د (س)))

= د (د ($\frac{١}{س}$))

= د (س) = $\frac{١}{س}$

③ نلاحظ مما سبق أن التركيب مرتين يعطي س والتركيب ثلاث مرات يعطي $\frac{١}{س}$ وهكذا نلاحظ أن في باقي التركيب يعطي س ثم $\frac{١}{س}$

∴ (د ∘ د ∘ د ∘ ..... إلى ن من المرات) (س)

= { س إذا كانت ن زوجية ، $\frac{١}{س}$ إذا كانت ن فردية }

إجابات تمارين 3

١

شكل (١) : متماثل حول محور السينات ومحور الصادات ونقطة الأصل

شكل (٢) : متماثل حول محور السينات

شكل (٣) : متماثل حول نقطة الأصل

شكل (٤) : متماثل حول نقطة الأصل

شكل (٥) : متماثل حول محور الصادات

شكل (٦) : متماثل حول نقطة الأصل

٢

① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ)

⑤ (ب) ⑥ (جـ) ⑦ (ب) ⑧ (ب)

⑨ (جـ) ⑩ (جـ) ⑪ (جـ) ⑫ (أ)

٣

① فردية ② ليست زوجية وليست فردية

③ زوجية ④ ليست زوجية وليست فردية

⑤ فردية ⑥ فردية

٤

شكل (١) :

المدى = {−٢ ، ٢} ، ليست زوجية وليست فردية

شكل (٢) : المدى = ح −]−٢ ، ٢[، فردية

شكل (٣) : المدى = {−١ ، ٠ ، ١} ، زوجية

شكل (٤) : المدى = [٠ ، ٤] ، زوجية

شكل (٥) : المدى = ح − {٠} ، فردية

شكل (٦) : المدى = ح ، فردية

٥

شكل (١) : د (س) = س^{٣} + س

∵ مجال د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة د فردية.

التحقيق الجبري : لكل س ، −س ∈ ح

∵ د (−س) = (−س)^{٣} + (−س)

= −س^{٣} − س = −(س^{٣} + س)

= −د (س)

∴ الدالة فردية

شكل (٢) : د (س) = س^{٣} − ٢

∵ مجال د = ح

، المنحنى ليس متماثلاً حول محور الصادات وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقيق الجبري : لكل س ، −س ∈ ح

∵ د (−س) = (−س)^{٣} − ٢ = −س^{٣} − ٢

= −(س^{٣} + ٢)

∴ د (−س) ≠ د (س) ≠ −د (س)

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

شكل (٣) : د (س) = ٢ − س^{٢}

∵ مجال د = [−٢ ، ٢]

، المنحنى متماثل حول محور الصادات.

∴ الدالة د زوجية.

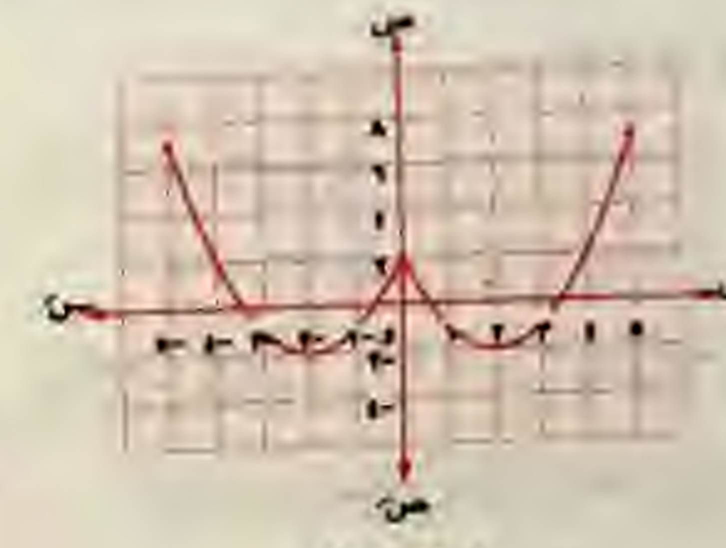
التحقيق الجبري : لكل س ، −س ∈ [−٢ ، ٢]

∵ د (−س) = ٢ − (−س)^{٢} = ٢ − س^{٢} = د (س)

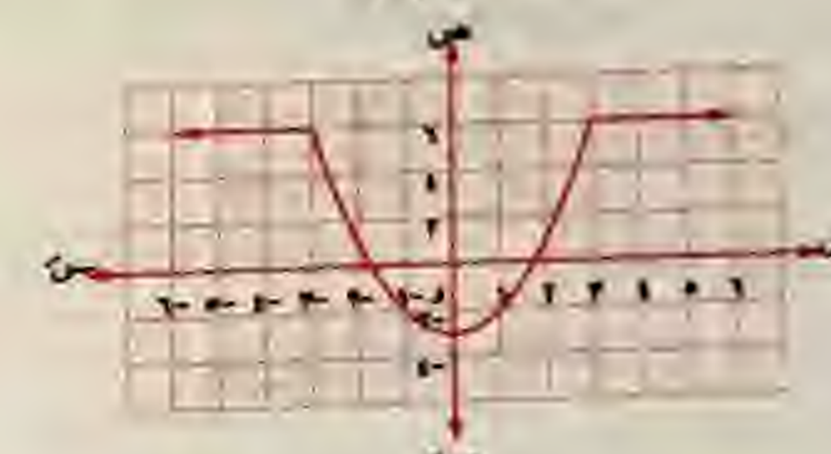
∴ الدالة زوجية

٦

أولاً :

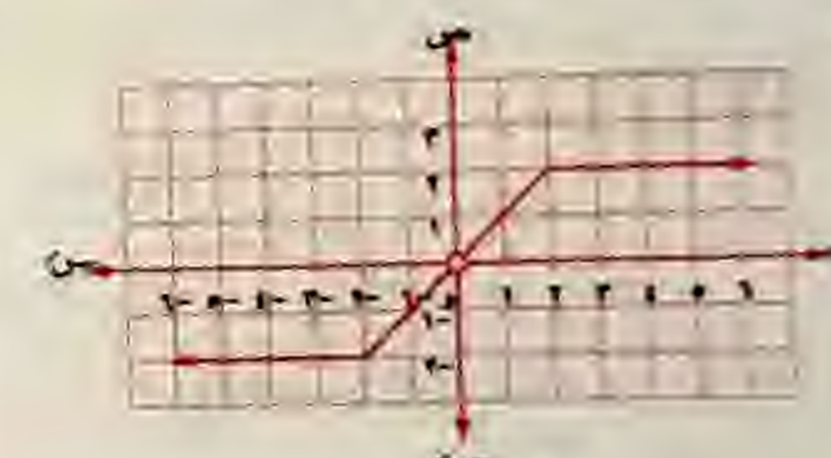


شكل (١)

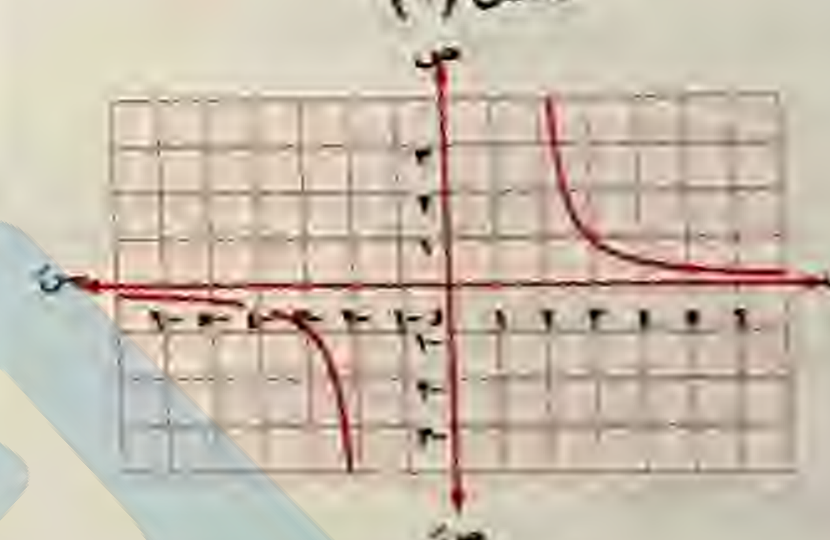


شكل (٣)

ثانيًا :



شكل (٢)



شكل (٤)

ثالثًا :

شكل (١) : المجال = [−٥ ، ٥] ، المدى = [−٢ ، ٧] ، ليست أحادية

شكل (٢) : المجال = ح − {٠} ، المدى = [−٢ ، ٢] − {٠} ، ليست أحادية

شكل (٣) : المجال = ح ، المدى = [−٣ ، ٦] ، ليست أحادية

شكل (٤) : المجال = ح − [−٢ ، ٢] ، المدى = ح − {٠} ، أحادية.

٧

① د(−س) = ٥ = د(س) ∴ الدالة زوجية.

② د(−س) = $(-س)^4 + (-س)^2 - 1$
= $س^4 + س^2 - 1$ = د(س)
∴ الدالة زوجية.

③ د(−س) = ٣(−س) − ٤$(-س)^3$
= −٣س + ٤$س^3$
= −(٣س − ٤$س^3$) = −د(س)
∴ الدالة فردية.

④ د(−س) = $(-س)^2$ − ٣(−س) + ٤
= $س^2$ + ٣س + ٤
≠ د(س) ≠ −د(س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑤ د(−س) = $(-س)^3((-س)^2 - 1)$
= $-س^3(س^2 - 1)$ = −د(س)
∴ الدالة فردية.

⑥ د(−س) = $(-س - 3)^2 - 7$
= $(س + 3)^2 - 7$
≠ د(س) ≠ −د(س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑦ د(−س) = $\frac{(-س)^2 + 2}{-س - 3}$
= $\frac{س^2 + 2}{-س - 3} = \frac{س^2 + 2}{-(س + 3)}$
≠ د(س) ≠ −د(س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

حل آخر :
∵ مجال الدالة = ح − {−٣}
∴ ٣ ∈ مجال الدالة ، −٣ ∉ مجالها
∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية.

⑧ د(−س) = $\frac{2(-س)^3 - (-س)^5}{-س}$
= $\frac{-2س^3 + س^5}{-س}$
= $\frac{-(2س^3 - س^5)}{-س}$
= $\frac{2س^3 - س^5}{س}$ = د(س)
∴ الدالة زوجية.

⑨ د(−س) = $\frac{(-س)^2}{-س - 1} = \frac{س^2}{-س - 1}$
≠ د(س) ≠ −د(س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑩ ∵ مجال د = [−٣ ، ∞[
∴ لكل س ∈ [−٣ ، ∞[
ليس بالضرورة أن يوجد −س ∈ [−٣ ، ∞[
∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

⑪ د(−س) = $((-س)^2 + 1)^2 = (س^2 + 1)^2$
= د(س)
∴ الدالة زوجية.

⑫ د(−س) = $\sqrt[3]{(-س)^2 + 6} = \sqrt[3]{س^2 + 6}$ = د(س)
∴ الدالة زوجية.

⑬ د(−س) = $\sqrt[3]{(-س)^3 + (-س)}$
= $\sqrt[3]{-(س^3 + س)} = -\sqrt[3]{س^3 + س}$
= −د(س)
∴ الدالة فردية.

⑭ د(−س) = $(-س)^3 - \frac{1}{-س}$
= $-س^3 + \frac{1}{س}$
= $-(س^3 - \frac{1}{س})$ = −د(س)
∴ الدالة فردية.

⑮ د(−س) = $(-س - \frac{2}{-س})^3$
= $(-(س - \frac{2}{س}))^3$
= $-(س - \frac{2}{س})^3$ = −د(س)
∴ الدالة فردية.

⑯ د(−س) = $(\frac{(-س)^2}{3} - \frac{5}{(-س)^4})^5$
= $(\frac{س^2}{3} - \frac{5}{س^4})^5$ = د(س)
∴ الدالة زوجية.

⑰ د(−س) = $(\frac{-س + 2}{-س - 2})^2 + (\frac{-س - 2}{-س + 2})^2$
= د(س)
∴ الدالة زوجية.

⑱ د(−س) = $(\frac{-س + 1}{-س - 1})^2 - (\frac{-س - 1}{-س + 1})^2$
= −د(س)
∴ الدالة فردية.

⑲ د(−س) = $(\frac{-س - 1}{-س + 1})^5 + (\frac{-س + 1}{-س - 1})^5$
= $[\frac{-(س + 1)}{-(س - 1)}]^5 + [\frac{-(س - 1)}{-(س + 1)}]^5$
= $(\frac{س + 1}{س - 1})^5 + (\frac{س - 1}{س + 1})^5$
= د(س)
∴ الدالة زوجية.

⑳ د(−س) = $((-س)^3 + 1)^4 - ((-س)^3 - 1)^4$
= $(-س^3 + 1)^4 - (-(س^3 + 1))^4$
= $(س^3 - 1)^4 - (س^3 + 1)^4$
= −د(س)
∴ الدالة فردية.

㉑ د(−س) = −س جا(−س) = −س جا س
= −د(س)
∴ الدالة فردية.

(٢٢) د (−س) = −٣س / ظا(−س) = −٣س / −ظاس = ٣س / ظاس
= د (س)
∴ الدالة زوجية.

(٢٣) د (−س) = (−س)^٢ × جا(−٣س) / (١ + (−س)^٤)
= س^٢ جا ٣س / (س^٤ + ١) = د (س)
∴ الدالة زوجية.

(٢٤) د (−س) = (٣(−س)^٢ − جتا(−س)) / ((−س)^٢ + ٦س)
= (٣س^٢ − جتاس) / (−س^٢ + ٦س) = (٣س^٢ − جتاس) / (−(س^٢ − ٦س))
= − د (س)
∴ الدالة فردية.

(٢٥) د (−س) = (−س)^٢ (جا(−س))^٢
= س^٢ (−جاس)^٢ = − س^٢ جا^٢ س
= − د (س)
∴ الدالة فردية.

(٢٦) د (−س) = − س جا (−س)^٢
= − س جا (−س^٢)
= س جاس^٢ = د (س)
∴ الدالة زوجية.

(٢٧) د (−س) = ((−س)^٢ + ظا(−س)) / ((−س)^٤ + جا(−س))
= (س^٢ − ظاس) / (س^٤ − جاس) ≠ د (س) ≠ − د (س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(٢٨) د (−س) = جا (−س)^٢ − (جا(−س))^٢
= جا س^٢ − (−جاس)^٢
= جاس^٢ − جا^٢ س = د (س)
∴ الدالة زوجية.

(٢٩) د (−س) = (−س)^٤ + جا^٢ (−س)
= س^٤ + (−جاس)^٢
= س^٤ + جا^٢ س = د (س)
∴ الدالة زوجية.

(٣٠) د (−س) = (−س)^٧ + ظا^٥ (−س)
= − س^٧ + (−ظاس)^٥
= − س^٧ − ظا^٥ س = − د (س)
∴ الدالة فردية.

(٣١) د (−س) = جا(−٣س) جتا(−٢س) / قا(−س)
= −جا٣س جتا٢س / قاس = − د (س)
∴ الدالة فردية.

(٣٢) ∵ د (س) = ٣^(٢س) + جتاس + ٣^(−٢س)
∴ د (−س) = ٣^(−٢س) + جتا(−س) + ٣^(٢س)
= ٣^(−٢س) + جتاس + ٣^(٢س)
= د (س)
∴ الدالة زوجية.

(٣٣) ∵ د (س)
= ((جتاس + جاس) − ١)((جتاس + جاس) + ١)
= (جتاس + جاس)^٢ − ١
= جتا^٢ س + جا^٢ س + ٢ جاس جتاس − ١
= ١ + ٢ جاس جتاس − ١ = ٢ جاس جتاس
∴ د (−س) = ٢ جا(−س) جتا(−س)
= −٢ جاس جتاس = − د (س)
∴ الدالة فردية.

(٣٤) د (−س) = { −٢س ، −س ≤ ٠ ؛ ٢س ، −س > ٠ }
= { −٢س ، س ≥ ٠ ؛ ٢س ، س < ٠ }
= { ٢س ، س ≤ ٠ ؛ −٢س ، س > ٠ }
= د (س)
∴ الدالة زوجية.

(٣٥) د (−س)
= { −٢س + (−س)^٢ ، −س ≥ ٠ ؛ −٢س − (−س)^٢ ، −س < ٠ }
= { −(٢س − س^٢) ، س ≤ ٠ ؛ −(٢س + س^٢) ، س > ٠ }
= { −(٢س + س^٢) ، س ≥ ٠ ؛ −(٢س − س^٢) ، س < ٠ }
= − { ٢س + س^٢ ، س ≥ ٠ ؛ ٢س − س^٢ ، س < ٠ }
= − د (س)
∴ الدالة فردية.

٨

شكل (١) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقي يقطع المنحنى في نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :
بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∴ د (أ) = ٢ − ٢أ ، د (ب) = ٢ − ٢ب
ويوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٢ − ٢أ = ٢ − ٢ب
∴ −٢أ = −٢ب ∴ أ = ب
∴ الدالة د أحادية

شكل (٢) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقي يقطع المنحنى في نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :
بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∴ د (أ) = ٤ − أ^٣ ، د (ب) = ٤ − ب^٣
ويوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٤ − أ^٣ = ٤ − ب^٣
∴ −أ^٣ = −ب^٣ ∴ أ = ب
∴ الدالة د أحادية.

شكل (٣) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقي يقطع المنحنى في نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :
بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∴ د (أ) = (١ − أ)/(أ − ٢) ، د (ب) = (١ − ب)/(ب − ٢)
ويوضع د (أ) = د (ب) ∴ (١ − أ)/(أ − ٢) = (١ − ب)/(ب − ٢)

∴ (أ − ١)(ب − ٢) = (أ − ٢)(ب − ١)
∴ أ − ب = ٠ ∴ أ = ب
∴ الدالة د أحادية.

٩

(١) بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∵ د (أ) = ٢أ − ٣ ، د (ب) = ٢ب − ٣
ويوضع د (أ) = د (ب)
∴ ٢أ − ٣ = ٢ب − ٣ ∴ ٢أ = ٢ب
∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

(٢) بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∵ د (أ) = ٤ − أ^٢ ، د (ب) = ٤ − ب^٢
ويوضع د (أ) = د (ب)
∴ ٤ − أ^٢ = ٤ − ب^٢ ∴ −أ^٢ = −ب^٢
∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

(٣) بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∵ د (أ) = ٣/(٢أ + ٥) ، د (ب) = ٣/(٢ب + ٥)
ويوضع د (أ) = د (ب)
∴ ٣/(٢أ + ٥) = ٣/(٢ب + ٥) ∴ ٢أ + ٥ = ٢ب + ٥
∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

(٤) بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∵ د (أ) = (٢أ − ٥)/(٤أ + ٣) ، د (ب) = (٢ب − ٥)/(٤ب + ٣)
ويوضع د (أ) = د (ب)
∴ (٢أ − ٥)/(٤أ + ٣) = (٢ب − ٥)/(٤ب + ٣)
∴ (٢أ − ٥)(٤ب + ٣) = (٢ب − ٥)(٤أ + ٣)
∴ ٨أب + ٦أ − ٢٠ب − ١٥ = ٨أب − ٢٠أ + ٦ب − ١٥
∴ ٢٦أ = ٢٦ب ∴ أ = ب
∴ الدالة د أحادية.

∴ (٢٣ - ٥) (٤ب + ٣) = (٢٤ + ٣) (٣ب - ٥)

∴ ١٢ أب + ٩أ - ٢٠ب - ١٥

= ١٢أب - ٢٠أ + ٩ب - ١٥

∴ ٩أ - ٢٠ب = - ٢٠أ + ٩ب

∴ ٢٩أ = ٢٩ب ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

١٠

① بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د ، أ ≠ ب

، ∵ د (أ) = ٣ ، د (ب) = ٣

∴ د (أ) = د (ب) ∴ د دالة ليست أحادية.

② بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (أ + ٣)^٢ ، د (ب) = (ب + ٣)^٢

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ (أ + ٣)^٢ = (ب + ٣)^٢ ∴ أ + ٣ = ± (ب + ٣)

∴ أ + ٣ = ب + ٣ ∴ أ = ب

أو أ + ٣ = - ب - ٣ ∴ أ = - ب - ٦

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب - ٦

∴ د دالة ليست أحادية.

③ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^٢ - ٥أ + ٦

، د (ب) = ب^٢ - ٥ب + ٦

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ أ^٢ - ٥أ + ٦ = ب^٢ - ٥ب + ٦

∴ أ^٢ - ٥أ = ب^٢ - ٥ب

∴ أ^٢ - ب^٢ - ٥أ + ٥ب = ٠

∴ (أ - ب) (أ + ب) - ٥ (أ - ب) = ٠

∴ (أ - ب) (أ + ب - ٥) = ٠

∴ أ - ب = ٠ ∴ أ = ب

أو أ + ب - ٥ = ٠ ∴ أ = - ب + ٥

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب + ٥

∴ د دالة ليست أحادية.

④ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ١/(أ^٢ - ٤) ، د (ب) = ١/(ب^٢ - ٤)

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ١/(أ^٢ - ٤) = ١/(ب^٢ - ٤) ∴ أ^٢ - ٤ = ب^٢ - ٤

∴ أ^٢ = ب^٢ ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب

∴ د دالة ليست أحادية.

١١

① بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^٣ + ١ ، د (ب) = ب^٣ + ١

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ أ^٣ + ١ = ب^٣ + ١

∴ أ^٣ = ب^٣ ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

② بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^٢ - ١ ، د (ب) = ب^٢ - ١

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ أ^٢ - ١ = ب^٢ - ١

∴ أ^٢ = ب^٢ ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب

∴ د دالة ليست أحادية.

③ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢أ^٢ - أ - ٣

، د (ب) = ٢ب^٢ - ب - ٣

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢أ^٢ - أ - ٣ = ٢ب^٢ - ب - ٣

∴ ٢أ^٢ - ٢ب^٢ - أ + ب = ٠

∴ ٢ (أ^٢ - ب^٢) - (أ - ب) = ٠

∴ ٢ (أ - ب) (أ + ب) - (أ - ب) = ٠

∴ (أ - ب) (٢ (أ + ب) - ١) = ٠

∴ أ - ب = ٠ ∴ أ = ب

أو ٢ (أ + ب) - ١ = ٠

∴ أ + ب = ١/٢ ∴ أ = ١/٢ - ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، ١/٢ - ب

∴ د دالة ليست أحادية.

④ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^٤ + ٢أ^٢ + ١

، د (ب) = ب^٤ + ٢ب^٢ + ١

، وبفرض د (أ) = د (ب)

∴ أ^٤ + ٢أ^٢ + ١ = ب^٤ + ٢ب^٢ + ١

∴ (أ^٢ + ١)^٢ = (ب^٢ + ١)^٢

∴ أ^٢ + ١ = ب^٢ + ١ ∴ أ^٢ = ب^٢ ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب

∴ د دالة ليست أحادية.

⑤ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (٢أ + ١)/(أ - ٢) ، د (ب) = (٢ب + ١)/(ب - ٢)

، وبفرض أن د (أ) = د (ب)

∴ (٢أ + ١)/(أ - ٢) = (٢ب + ١)/(ب - ٢)

∴ (٢أ + ١) (ب - ٢) = (أ - ٢) (٢ب + ١)

∴ ٢أب - ٤أ + ب - ٢

= ٢أب + أ - ٤ب - ٢

∴ - ٤أ + ب = أ - ٤ب

∴ ٥ب = ٥أ ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

⑥ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (٣ - أ)/(أ + ٢) ، د (ب) = (٣ - ب)/(ب + ٢)

، وبفرض أن د (أ) = د (ب) ∴ (٣ - أ)/(أ + ٢) = (٣ - ب)/(ب + ٢)

∴ (٣ - أ) (ب + ٢) = (أ + ٢) (٣ - ب)

∴ ٣ب + ٦ - أب - ٢أ = ٣أ - أب + ٦ - ٢ب

∴ ٣ب - ٢أ = ٣أ - ٢ب

∴ ٥ب = ٥أ ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

١٢

من ① : ④ ليست زوجية وليست فردية.

١٣

① ∵ الدالة فردية. ∴ د (-٥) = - د (٥)

∴ المقدار = (-٧ د (٥) + ٣ د (٥))/(-٢ د (٥)) = (-٤ د (٥))/(-٢ د (٥)) = ٢

② ∵ الدالة زوجية. ∴ د (-٥) = د (٥)

∴ المقدار = (٧ د (٥) + ٣ د (٥))/(٢ د (٥)) = (١٠ د (٥))/(٢ د (٥)) = ٥

١٤

① (د + ر) (س) = (١ - س)^٢ + (١ + س)^٢

∴ (د + ر) (-س) = (١ + س)^٢ + (١ - س)^٢

= (د + ر) (س)

∴ (د + ر) زوجية.

② (د - ر) (س) = (١ - س)^٢ - (١ + س)^٢

∴ (د - ر) (-س) = (١ + س)^٢ - (١ - س)^٢

= - (د - ر) (س)

∴ (د - ر) فردية.

③ (د . ر) (س) = (١ - س)^٢ (١ + س)^٢

∴ (د . ر) (-س) = (١ + س)^٢ (١ - س)^٢

= (د . ر) (س)

∴ (د . ر) زوجية.

④ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) = $\frac{(١ - س)^٢}{(١ + س)^٢}$

∴ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (−س) = $\frac{(١ + س)^٢}{(١ - س)^٢}$

≠ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) ≠ − $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س)

∴ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ ليست زوجية وليست فردية.

١٥

∵ $د_١$ ، $د_٢$ زوجيتان ، $ر_١$ ، $ر_٢$ فرديتان

① $د_١ + ر_٢$ ليست زوجية وليست فردية

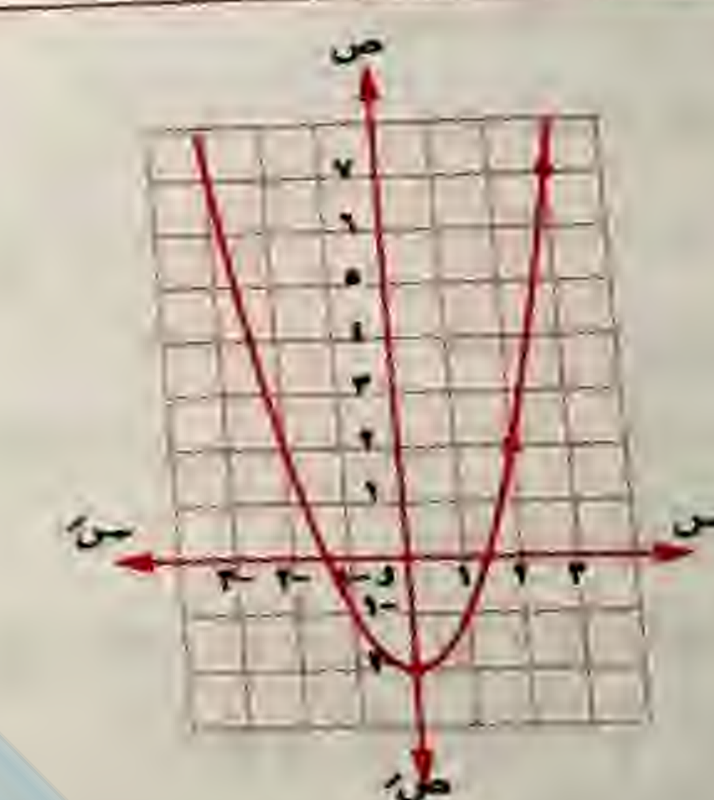
② $د_١ - د_٢$ زوجية ③ $ر_١ + ر_٢$ فردية

④ $د_١ \cdot ر_٢$ فردية ⑤ $ر_١ \cdot ر_٢$ زوجية

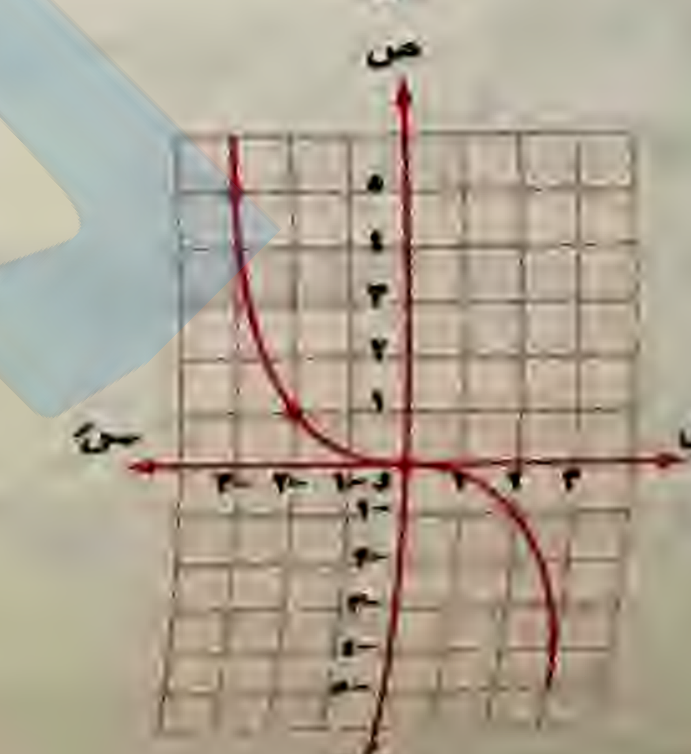
⑥ $\frac{د_٢}{د_١}$ زوجية

١٦

①



②



١٧

① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب)

⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (أ)

إرشادات لحل رقم ١٧

① ∵ د دالة ينتمى إليها النقطة (٢ ، ٣)

∴ النقطة (٢ ، −١) ∉ بيان الدالة

، ∵ د أحادية ينتمى إليها النقطة (٢ ، ٣)

∴ النقطة (٥ ، ٣) ∉ بيان الدالة

∴ النقطة التى يمكن أن تنتمى للدالة هى (٢ ، ٣)

② ∵ الدالة أحادية تمر بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ب)

∴ لابد وأن يكون أ ≠ ب دائمًا

③ ∵ د زوجية ∴ د (س) = د (−س)

∴ د (س) + $س^٢$ د (س) = ٣

∴ د (س) [١ + $س^٢$] = ٣

∴ د (س) = $\frac{٣}{١ + س^٢}$

∴ د (١) = $١\frac{١}{٢}$

④ ∵ د فردية ، د (١) = ك ∴ د (−١) = −ك

، ∵ د (س + ٢) = د (س) + د (٢)

بوضع س = −١

∴ د (١) = د (−١) + د (٢)

∴ ك = −ك + د (٢) ∴ د (٢) = ٢ ك

، بوضع س = ١

∴ د (٣) = د (١) + د (٢) = ك + ٢ ك = ٣ ك

⑤ ∵ (د + ر) (−س)

= $\frac{١ + (−س)}{١ - (−س)} + \frac{١ - (−س)}{١ + (−س)}$

= $\frac{١ - س}{١ + س} + \frac{١ + س}{١ - س}$ = (د + ر) (س)

∴ (د + ر) دالة زوجية

، ∵ (د . ر) (س) = $\frac{١ + س}{١ - س} \times \frac{١ - س}{١ + س}$ = ١

∴ (د . ر) دالة زوجية أيضًا.

⑥ ∵ ر (−س) = د (−س) + د (س) = ر (س)

∴ ر دالة زوجية دائمًا

⑦ ∵ ٣ د (س) + ٢ د (−س) = $س^٣$ − جا س (١)

وبوضع −س بدلًا من س

∴ ٣ د (−س) + ٢ د (س) = $(−س)^٣$ − جا (−س)

∴ ٣ د (−س) + ٢ د (س) = −$س^٣$ + جا س (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٥ د (س) + ٥ د (−س) = صفر

∴ د (س) = − د (−س)

∴ الدالة فردية.

⑧ د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = $س^٢$ + ١

(١) (د × ر) (س) = $س^٣$ ($س^٢$ + ١)

∴ (د × ر) (−س) = $(−س)^٣$ ($(−س)^٢$ + ١)

= −$س^٣$ ($س^٢$ + ١)

∴ (د × ر) (−س) = − (د × ر) (س)

أى أن : (د × ر) فردية.

(٢) (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د ($س^٢$ + ١)

= $(س^٢ + ١)^٣$

∴ (د ∘ ر) (−س) = $((−س)^٢ + ١)^٣$

= $(س^٢ + ١)^٣$

= (د ∘ ر) (س)

∴ (د ∘ ر) زوجية.

(٣) (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر ($س^٣$) = $س^٦$ + ١

∴ (ر ∘ د) (−س) = $(−س)^٦$ + ١

= $س^٦$ + ١ = (ر ∘ د) (س)

∴ (ر ∘ د) زوجية.

∴ الاجابة (أ) هى الصحيحة.

إجابات تمارين ٤

١

①



المدى = {−٣ ، ١ ، ٥ ، ٧}

②



المدى = [٢ ، ٦[

③



المدى =]−٢ ، ∞[

∴ د (س) زوجية

المدى = [٦ ، ∞[

④



المدى = ح

⑤



المدى =]-∞ ، ٠]

⑥



• المدى = [-٥ ، ∞[

⑦



لاحظ أن رأس المنحنى (١,٥ ، -٢ $\frac{1}{4}$)

• المدى = [-٢ $\frac{1}{4}$ ، ∞[

---

①



• المدى = [١ ، ٦[

• الدالة تناقصية فى]-٢ ، ١[

، وتزايدية فى]١ ، ٦[

② الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقي يقطع الدالة في أكثر من نقطة.

---

①



• د (س) = $\frac{٣(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$

∴ د (س) = ٣

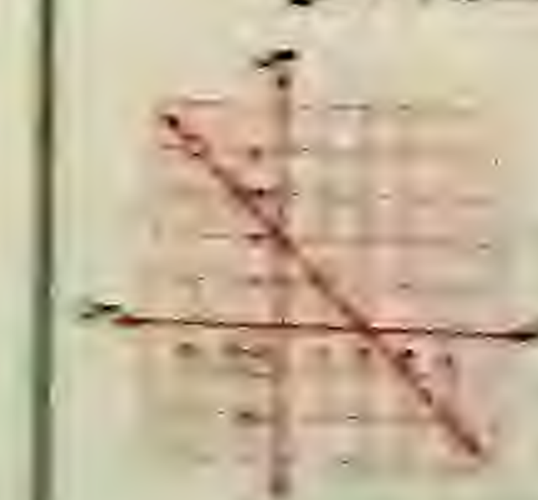
، س ≠ ± ١

• المجال = ح - {١ ، -١} • المدى = {٣}

• الدالة ثابتة على مجالها. • الدالة زوجية.

• الدالة متماثلة حول محور الصادات.

②



• د (س) = $\frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س + ٢}$ = ٢ - س

، س ≠ -٢

• المجال = ح - {-٢}

• المدى = ح - {٤}

• الدالة تناقصية على مجالها

• الدالة ليست فردية وليست زوجية.

②



• د (س) = $\frac{س(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$ = س ، س ≠ ± ١

• المجال = ح - {-١ ، ١}

• المدى = ح - {-١ ، ١}

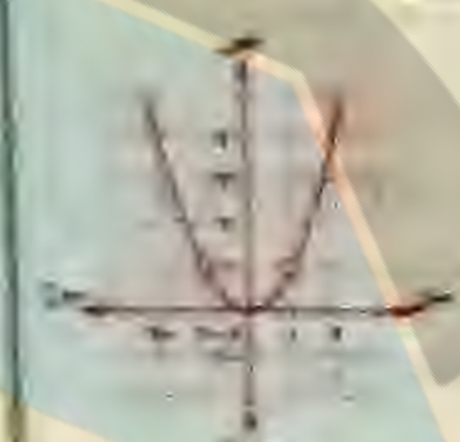
• الدالة تزايدية

على ح - {-١ ، ١}

• الدالة فردية

• الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

④



د (س) = $\frac{س^٢(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$ = س^٢

حيث س ≠ ± ١

• المجال = ح - {١ ، -١}

• المدى = [٠ ، ∞[- {١}

• الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠] - {-١}

• وتزايدية فى [٠ ، ∞[- {١} • الدالة زوجية

• الدالة متماثلة حول محور الصادات.

---

① [illegible] ② [illegible] ③ [illegible] ④ [illegible] ⑤ [illegible]

---

①



• المجال =]-∞ ، ٣]

• المدى = {٢}

• الدالة ثابتة فى الفترة]-∞ ، ٣]

• الدالة ليست زوجية وليست فردية

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل

②



• المجال = ح

• المدى = {-٢ ، ٢}

• الدالة ثابتة فى كل من

]-∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل

③



• المجال = ح

• المدى

=]-∞ ، -١] ∪ {٤}

• الدالة ثابتة فى]٠ ، ∞[، وتزايدية فى]-∞ ، ٠[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل

④



• المجال = [-٢ ، ٤]

• المدى = [٠ ، ٣]

• الدالة تزايدية

فى]-٢ ، ١[

، وتناقصية فى]١ ، ٤[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية

• محور التماثل هو المستقيم س = ١

⑤



• المجال = ح

• المدى = [-٢ ، ∞[

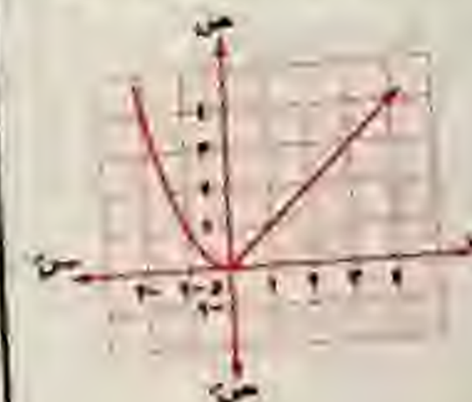
• الدالة ثابتة

فى]-∞ ، [illegible][

، وتناقصية فى [illegible] ، وتزايدية فى [illegible]

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(٦)



• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ∞[
• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[
، وتزايدية في]٠ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(٧)



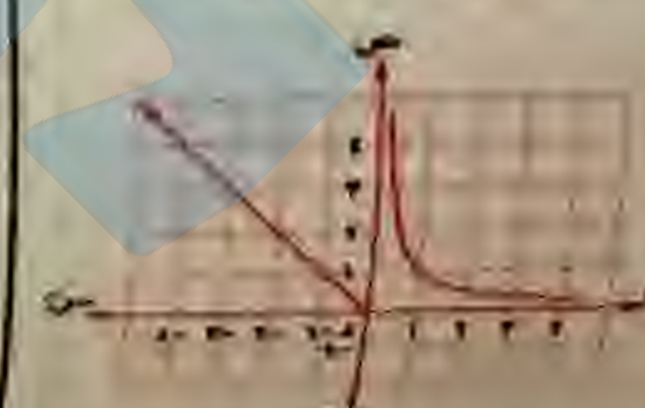
• المجال = ح - {١}
• المدى =]-∞ ، ١[
• الدالة تزايدية في]-∞ ، ١[
، وثابتة في]١ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(٨)



• المجال = ح
• المدى =]-∞ ، ١]
• الدالة تزايدية في]-∞ ، ١[
، وتناقصية في]١ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(٩)



• المجال = ح
• المدى = [صفر ، ∞[
• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[، ...

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(١٠)



• المجال = ح
• المدى = [صفر ، ∞[
• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[
، وتزايدية في]٠ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

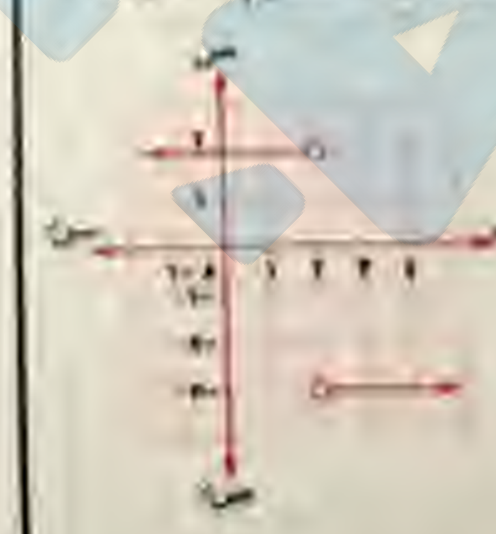
(١١)



• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ٢]
• الدالة ثابتة في كل من]-∞ ، -٢[،]٢ ، ∞[
، وتناقصية في]-٢ ، ٠[، وتزايدية في]٠ ، ٢[
• الدالة زوجية. • محور التماثل هو المستقيم س = ٠

(١٢)

د(س) = { -٢ ، س < ٢ ؛ ٢ ، س > ٢ }



• المجال = ح - {٢}
• المدى = {٢ ، -٢}
• الدالة ثابتة في كل من]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(١٣)



• المجال = [-٣ ، ٣]
• المدى = {٠ ، ٢}
• الدالة ثابتة في كل من:
]-٣ ، -١[،]-١ ، ٠[،]٠ ، ١[،]١ ، ٣[
• الدالة زوجية
• محور التماثل هو المستقيم س = ٠

(١٤)



• المجال = [-٤ ، ٤] • المدى = [١ ، ٣]
• الدالة تناقصية في]-٤ ، -٢[
، وثابتة في]-٢ ، ٢[
وتزايدية في]٢ ، ٤[• الدالة زوجية.
• محور التماثل هو المستقيم س = ٠

٦

$د_1$(س) = ٣ س - ١ ، مجالها = ح
، $د_2$(س) = ٣ - ٢ س ، مجالها = [-٢ ، ٣]
، ($د_1$ + $د_2$)(س) = س + ٢ ، ومجالها = [-٢ ، ٣]

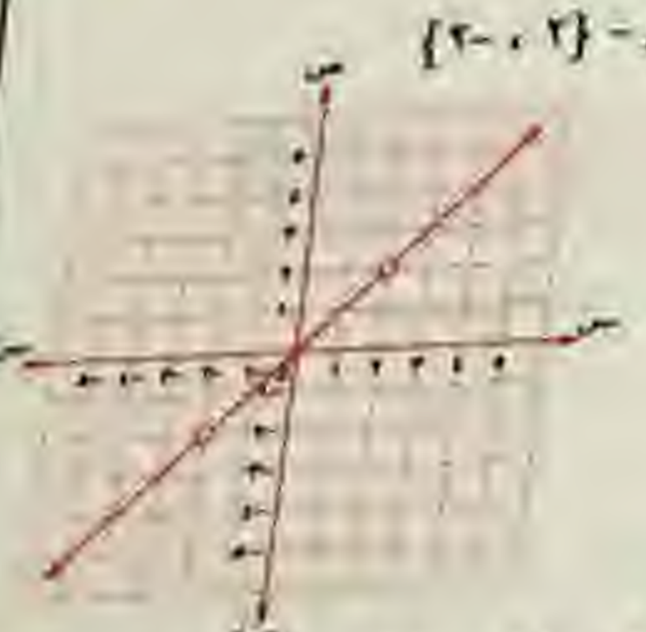
س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
($د_1$ + $د_2$)(س)	٠	١	٢	٣	٤	٥



• المجال = [-٢ ، ٣]
• الدالة تزايدية في]-٢ ، ٣[

٧

∵ د(س) = $س^3$ - ٤ س ومجالها = ح
، ر(س) = $س^2$ - ٤ ومجالها = ح
∴ $\frac{د}{ر}$(س) = $\frac{س^3 - ٤ س}{س^2 - ٤}$ = $\frac{س(س^2 - ٤)}{س^2 - ٤}$ = س
حيث س ≠ ± ٢
ومجال $\frac{د}{ر}$ = ح - {٢ ، -٢}



• المدى = ح - {٢ ، -٢} • الدالة فردية.
• الدالة تزايدية على ح - {٢ ، -٢} • الدالة أحادية.

إجابات تمارين 5

١

(١)



• المجال = ح
• المدى = [-٣ ، ∞[
• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[
، الدالة تزايدية في]٠ ، ∞[
• الدالة زوجية.
• معادلة محور التماثل هي : س = صفر

(٢)



• المجال = ح
• المدى = [١ ، ∞[
• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[
، الدالة تزايدية في]٠ ، ∞[
• الدالة زوجية.
• معادلة محور التماثل هي : س = صفر

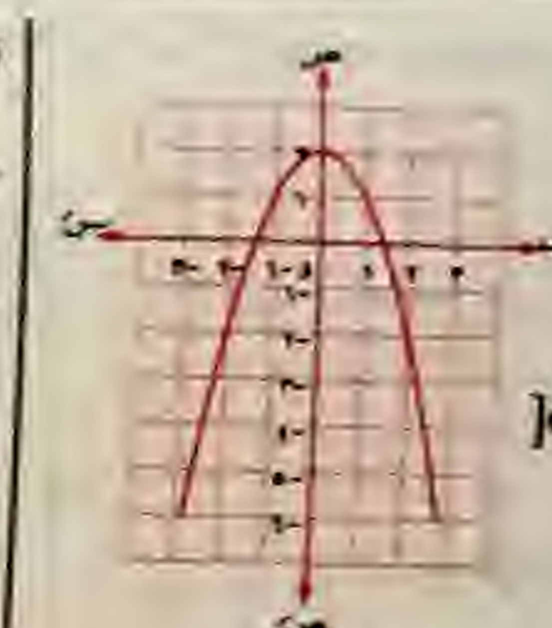
(٣)
• المجال = ح
• المدى =]-∞ ، ٢]

(٦)
• المجال = ح
• المدى = [-٤ ، ∞[

(٩)
• المجال = ح
• المدى = [-$\frac{1}{4}$ ، ∞[

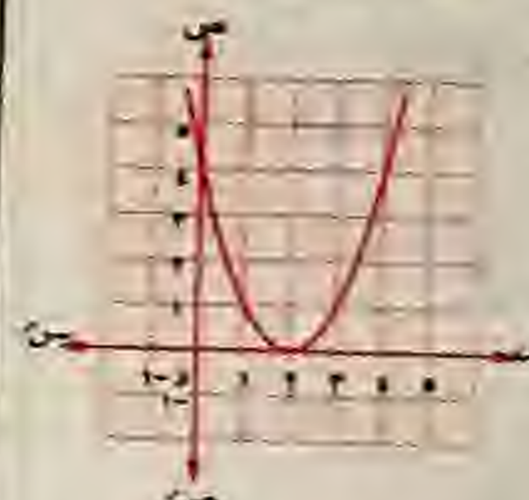
• الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢[
، الدالة تزايدية في]-٢ ، ∞[

③



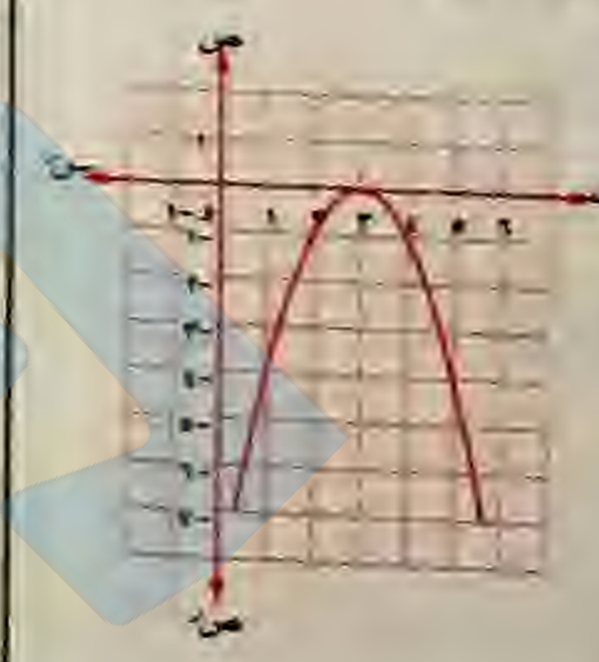
- المجال = ح
- المدى =]-∞ ، ٢]
- الدالة تناقصية في]٠ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية
  في]-∞ ، ٠[
- الدالة زوجية.
- معادلة محور التماثل هي : س = صفر

④



- المجال = ح
- المدى = [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية
  في]-∞ ، ٢[
  ، الدالة تزايدية في]٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = ٢

⑤



- المجال = ح
- المدى =]-∞ ، ٠]
- الدالة تناقصية
  في]٣ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية
  في]-∞ ، ٣[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = ٣

⑥



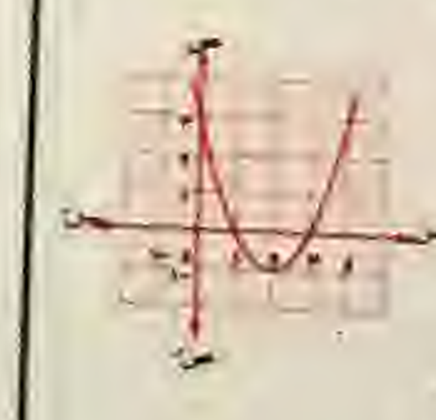
- المجال = ح
- المدى = [-٤ ، ∞[
- الدالة تناقصية
  في]-∞ ، -٢[
  ، الدالة تزايدية
  في]-٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = -٢

⑦



- المجال = ح
- المدى =]-∞ ، ٢]
- الدالة تناقصية
  في]-٣ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية
  في]-∞ ، -٣[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = -٣

⑧



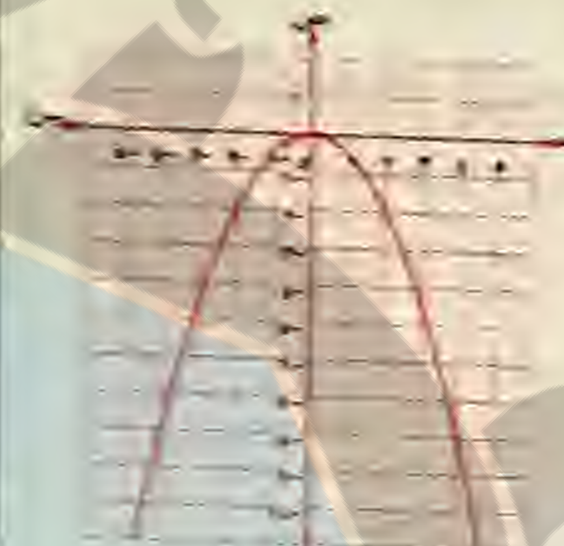
- المجال = ح
- المدى = [-١ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]-∞ ، ٢[
  ، الدالة تزايدية في]٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = ٢

⑨



- المجال = ح
- المدى = [$-\frac{1}{4}$ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]-∞ ، $\frac{-3}{2}$[
  ، الدالة تزايدية في]$\frac{-3}{2}$ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = $-\frac{3}{2}$

⑩



- المجال = ح
- المدى =]-∞ ، ٠]
- الدالة تناقصية
  في]٠ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية
  في]-∞ ، ٠[
- الدالة زوجية.
- معادلة محور التماثل هي : س = صفر

⑪



ر (س) = $(س + ٢)^{٢}$

- المجال = ح
- المدى = [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢[
  ، الدالة تزايدية في]-٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = -٢

⑫



ر (س) = $(س + ٢)^{٢}$ - ٣

- المجال = ح
- المدى = [-٣ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢[
  ، الدالة تزايدية في]-٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = -٢

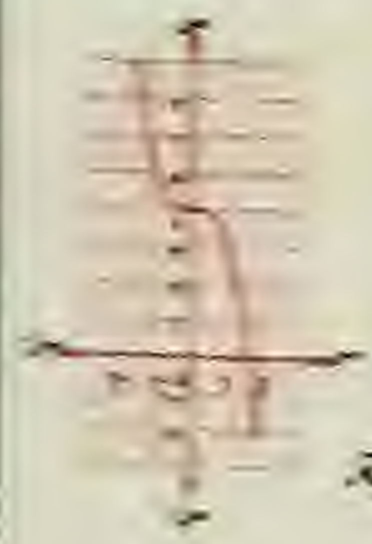
٢

①



- المجال = ح • المدى = ح
- الدالة تزايدية على ح
- الدالة ليست زوجية
  وليست فردية.
- نقطة التماثل هي : (٠ ، ٤)

②



- المجال = ح
- المدى = ح
- الدالة تناقصية على ح
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- نقطة التماثل هي : (٠ ، ٤)

③

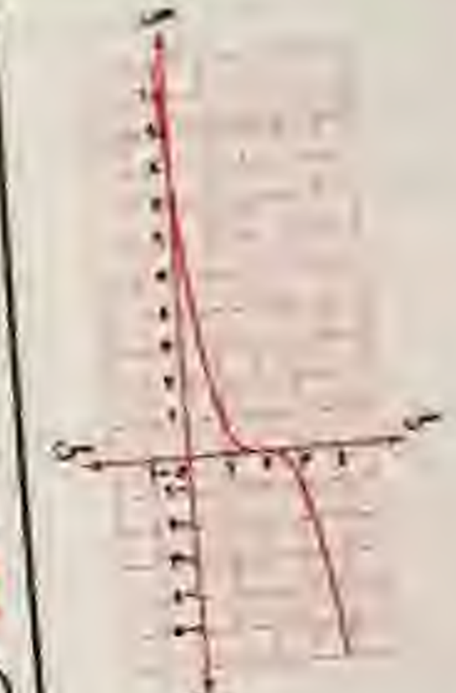


- المجال = ح
- المدى = ح
- الدالة تزايدية على ح
- الدالة ليست زوجية
  وليست فردية.
- نقطة التماثل هي : (٣ ، ٠)

④

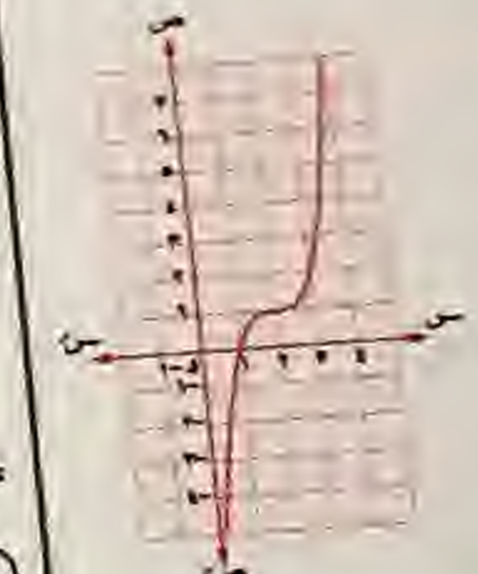
د (س) = − (س − ٢)^٣

* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٠)



⑤

* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ١)



⑥

* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (١ ، ٢)



⑦

د (س) = − (س − ٣)^٣ + ١

* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٣ ، ١)



⑧

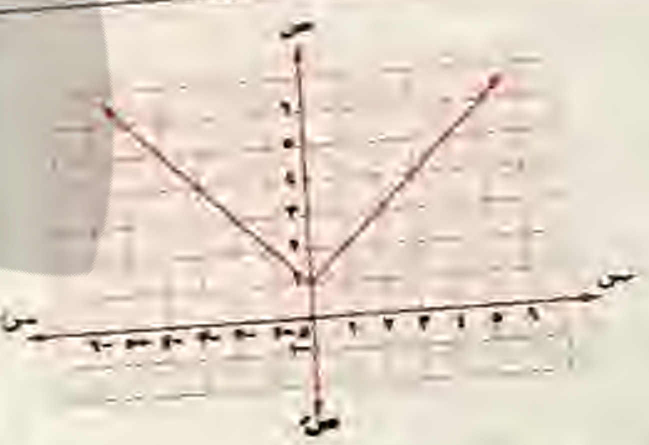
* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، −١)



٣

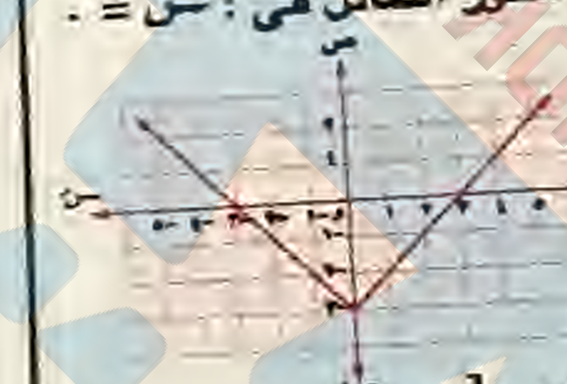
①

* المجال = ح
* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية * معادلة محور التماثل هى : س = ٠



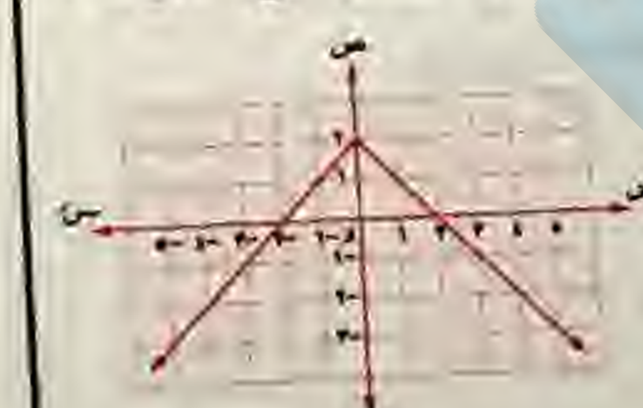
②

* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية * معادلة محور التماثل هى : س = ٠



③

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية فى]٠ ، ∞[، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠



④

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −١[، الدالة تزايدية فى]−١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −١



⑤

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى]−٥ ، ∞[، الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٥[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٥



⑥

د (س) = |س − ٢| + ١

* المجال = ح
* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[، الدالة تزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢



⑦

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٤]
* الدالة تناقصية فى]٢ ، ∞[، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢



⑧

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠



⑨

* المجال = ح
* المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٧[، الدالة تزايدية فى]٧ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٧



⑩

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٥]
* الدالة تناقصية فى]−٢ ، ∞[، الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٢[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢



⑪ د (س) = ١ − $\frac{1}{2}$ |س − ٢|
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٠)

⑤ د (س) = $\frac{1}{س - ٤}$ − ٢
* المجال = ح − {٢} * المدى = ح − {١}

• نقطة التماثل هى : (٢ ، ١)

• معادلة محور التماثل هى : س = ٠

فى]٢ ، ∞[

⑪ ر(س) = ١ − ½ |س − ٢|



• المجال = ح • المدى =]−∞ ، ١]

• الدالة تناقصية فى]٢ ، ∞[

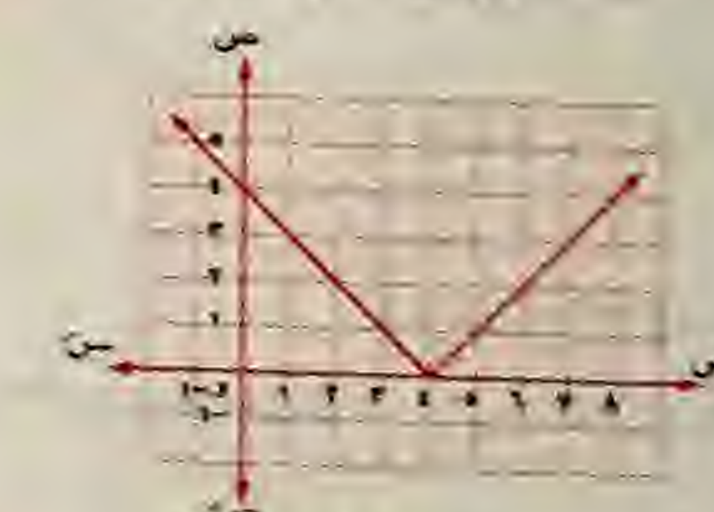
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑫ ∵ ر(س) = √(س² − ٨ س + ١٦)

= √((س − ٤)²) = |س − ٤|



• المجال = ح • المدى = [٠ ، ∞[

• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٤[

، الدالة تزايدية فى]٤ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• معادلة محور التماثل هى : س = ٤

٤

①



• المجال = ح − {٠}

• المدى = ح − {٢}

• الدالة تناقصية

فى]٠ ، ∞[

،]−∞ ، ٠[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هى : (٠ ، ٢)

②



• المجال = ح − {−٢} • المدى = ح − {٠}

• الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٢[،]−٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هى : (−٢ ، ٠)

③



• المجال = ح − {٢} • المدى = ح − {٣}

• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

④



• المجال = ح − {−٢}

• المدى = ح − {٣}

• الدالة تزايدية

فى]−∞ ، −٢[

،]−٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هى : (−٢ ، ٣)

⑤ ر(س) = $\frac{-١}{س - ٤}$ − ٣



• المجال = ح − {٤} • المدى = ح − {−٣}

• الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٤[،]٤ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هى : (٤ ، −٣)

⑥ ر(س) = ١ + $\frac{١}{س}$



• المجال = ح − {٠} • المدى = ح − {١}

• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هى : (٠ ، ١)

⑦ ر(س) = ١ − $\frac{١}{س - ٢}$



• المجال = ح − {٢} • المدى = ح − {١}

• الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هى : (٢ ، ١)

⑧ ر(س) = ٢ − $\frac{٢}{س + ١}$



• المجال = ح − {−١} • المدى = ح − {٢}

• الدالة تزايدية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هى : (−١ ، ٢)

⑨ ر(س) = ٢ + $\frac{١}{س - ٢}$



• المجال = ح − {٢} • المدى = ح − {٢}

• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هى : (٢ ، ٢)

⑩ $ن(س) = \frac{س - ١}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{١}{س + ١}$ ، $س \neq ١$



• المجال = ح − {−١ ، ١} • المدى = ح − {٠ ، ½}

• الدالة تناقصية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• لا توجد نقطة تماثل.

٥

• ن(س) = |س − ٢| • ق(س) = |س| − ٢

• ع(س) = |س + ٣| + ٢

٦

① د(س) = −١

② د(س) = س − ٢

③ $د(س) = (س + ٢)^{٢} - ٣$

④ $د(س) = -(س - ١)^{٢} + ٢$

⑤ $د(س) = س^{٣}$

⑥ $د(س) = (س - ٢)^{٣}$

⑦ $د(س) = (س + ١)^{٣} - ٣$

⑧ د(س) = |س − ٢| − ٣

⑨ د(س) = −|س − ١| + ٢

⑩ $د(س) = \frac{-١}{س}$

⑪ $د(س) = \frac{١}{س} + ٢$

⑫ $د(س) = \frac{-١}{س + ٢} - ٣$

٧

① (أ)	② (ب)	③ (جـ)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (أ)
⑬ (جـ)	⑭ (د)	⑮ (د)	⑯ (د)
⑰ (أ)			

٨

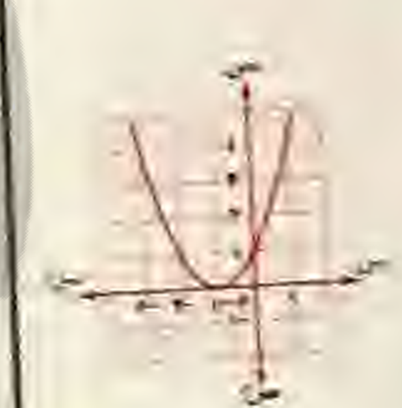
①

$د_{١}(س) = د(س + ١)$

$= (س + ١)^{٢}$

• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[



②

$د_{٢}(س) = د(س) - ١$

$= س^{٢} - ١$

• المجال = ح

• المدى = [−١ ، ∞[



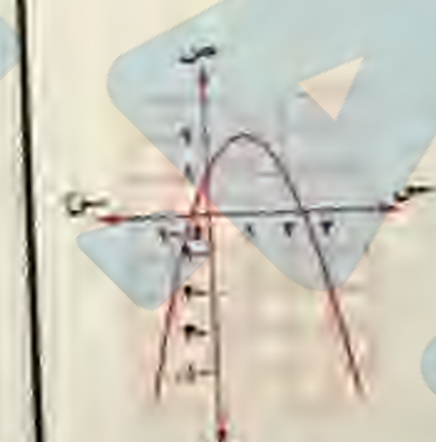
③

$د_{٣}(س) = ٢ - د(س - ١)$

$= ٢ - (س - ١)^{٢}$

• المجال = ح

• المدى =]−∞ ، ٢]



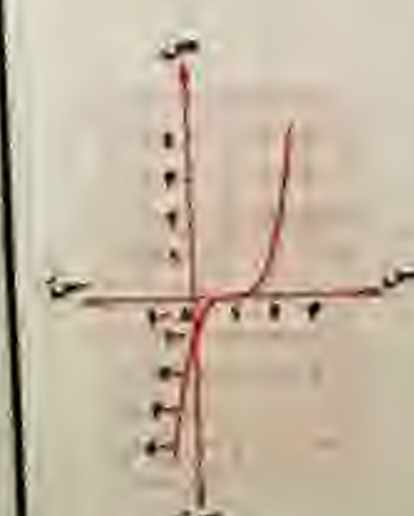
④

$ن_{١}(س) = ن(س - ١)$

$= (س - ١)^{٣}$

• المجال = ح

• المدى = ح



⑤

$ن_{١}(س) = ن(س) - \frac{١}{٢}$

$= س^{٣} - \frac{١}{٢}$

• المجال = ح

• المدى = ح



⑥

$ن_{٢}(س) = ن(س - ١) + ٢$

$= (س - ١)^{٣} + ٢$

• المجال = ح

• المدى = ح



⑦

$ع_{١}(س) = ٢ ع(س)$

= ٢ |س|

• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[



⑧

$ع_{٢}(س) = \frac{١}{٢} ع(س) - ٢ = \frac{١}{٢} |س| - ٢$

• المجال = ح

• المدى = [−٢ ، ∞[



⑨



$ع_{٣}(س) = ٢ ع(س - ١) = ٢ |س - ١|$

• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[

⑩



$هـ_{١}(س) = هـ(س - ٢) = \frac{١}{س - ٢}$

• المجال = ح − {٢}

• المدى = ح − {٠}

⑪

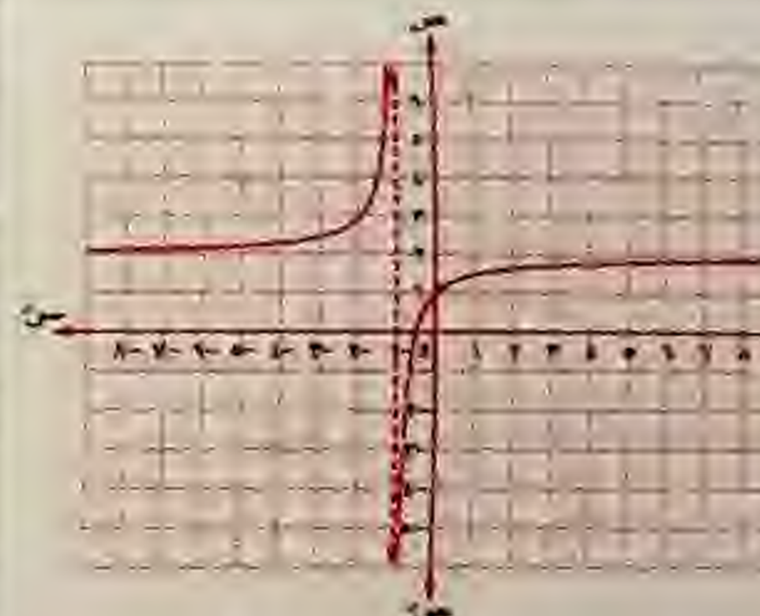


$هـ_{٢}(س) = هـ(س) - ١ = \frac{١}{س} - ١$

• المجال = ح − {٠}

• المدى = ح − {−١}

⑫

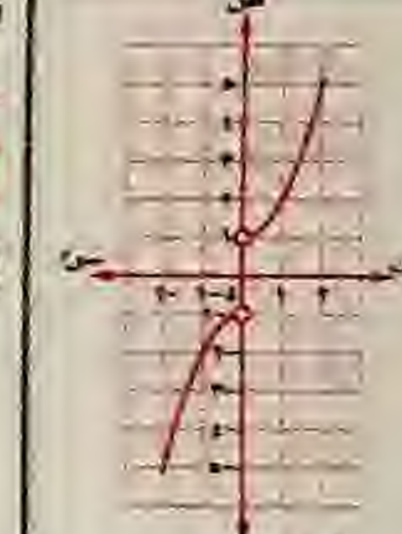


$ع(س) = ٢ - ه(س + ١) = ٢ - \frac{١}{س + ١}$

* المجال = ح - {-١}
* المدى = ح - {٢}

٩

①



* المدى = ح - [-١ ، ١]
* الدالة تزايدية فى ح - {٠}

②



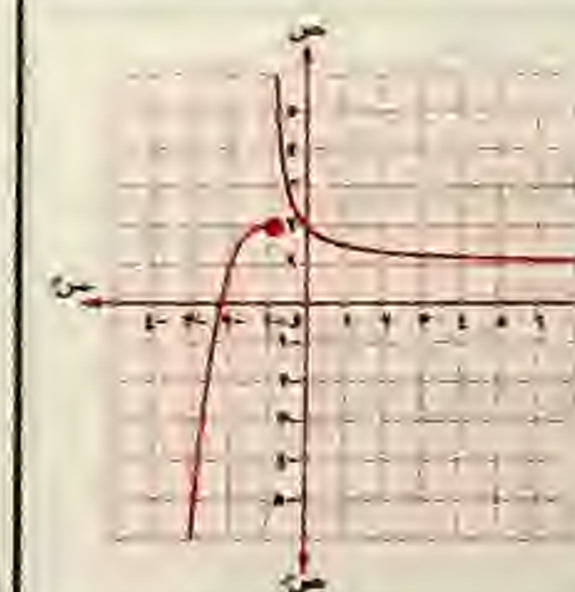
* المدى
= [-١٧ ، ١٧] -]-١ ، ١[
* الدالة تناقصية
فى]-٤ ، ٠[
،]٠ ، ٤[

③



* المدى = [-١ ، ∞[
* الدالة ثابتة
فى]-∞ ، ٠[
، وتزايدية فى]٠ ، ∞[

④



* المدى = ح
* الدالة تناقصية
فى]-١ ، ∞[
، وتزايدية
فى]-∞ ، -١[

١٠

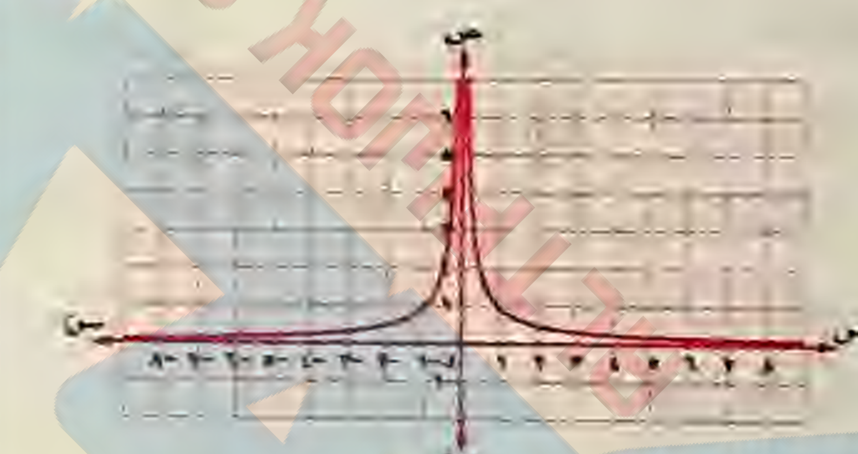
شكل (١) : $د(س) = |(س - ٣)^٢ - ١|$

شكل (٢) : $ه(س) = |س^٣|$

شكل (٣) : $ر(س) = \frac{١}{|س - ٢|}$

١١

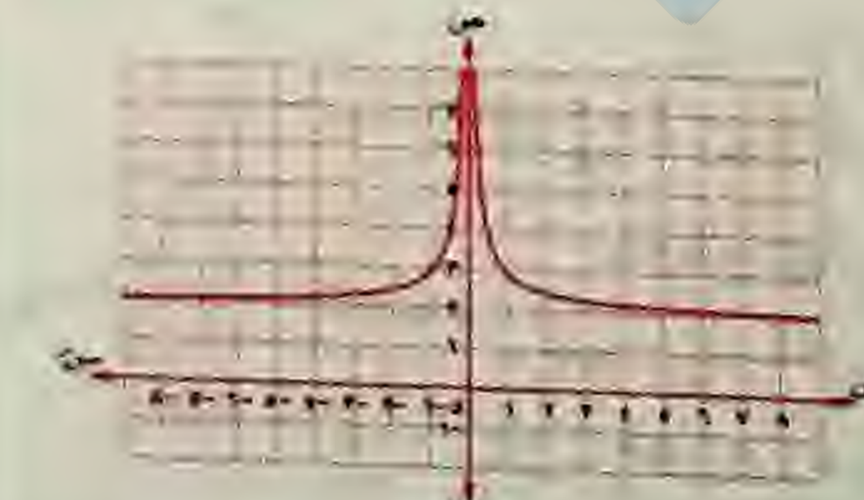
①



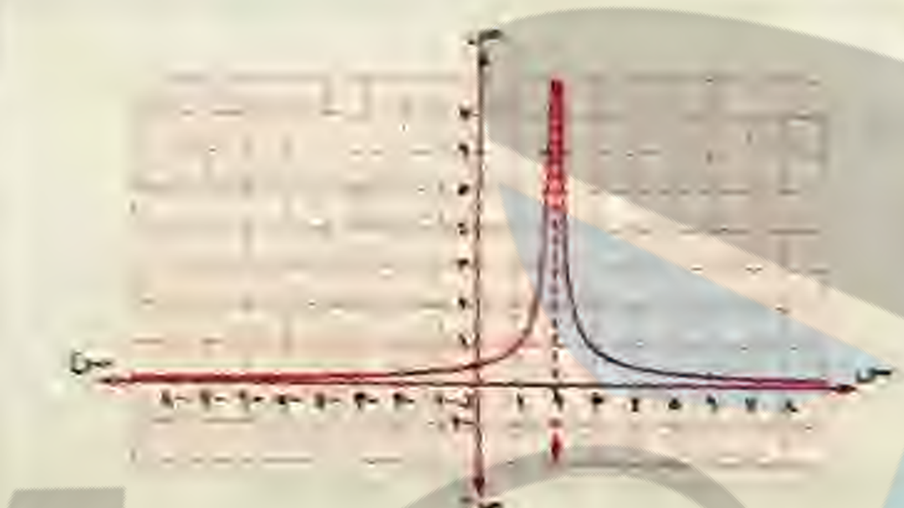
②



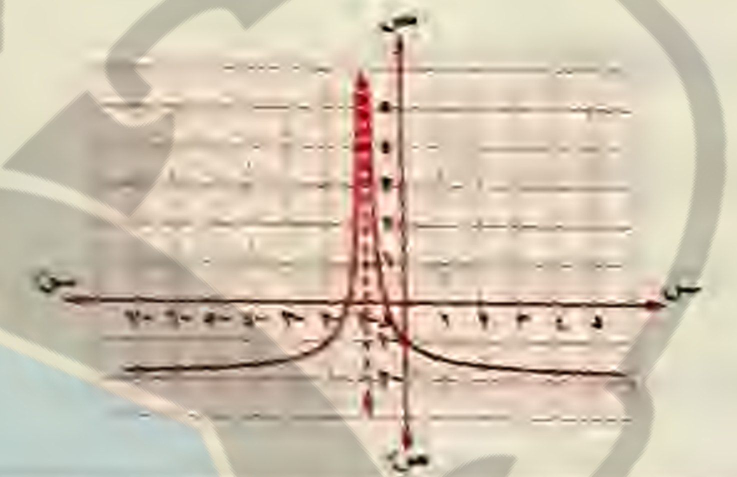
③



④



⑤



١٢

① $د(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٠ \\ -س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$



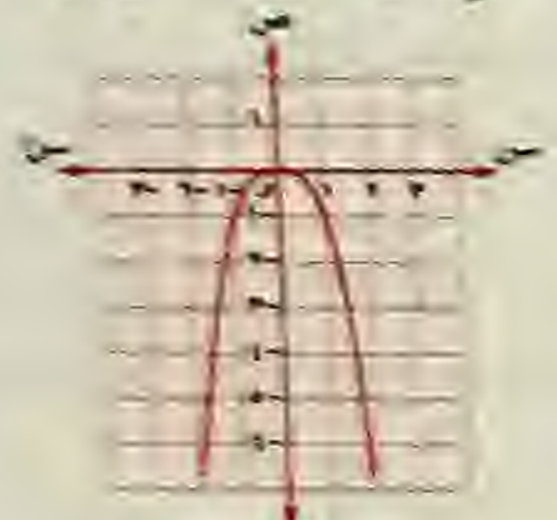
② $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & ، س \geq ٠ \\ -س^٢ - ١ & ، س < ٠ \end{cases}$



③ $د(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٠ \\ -س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$



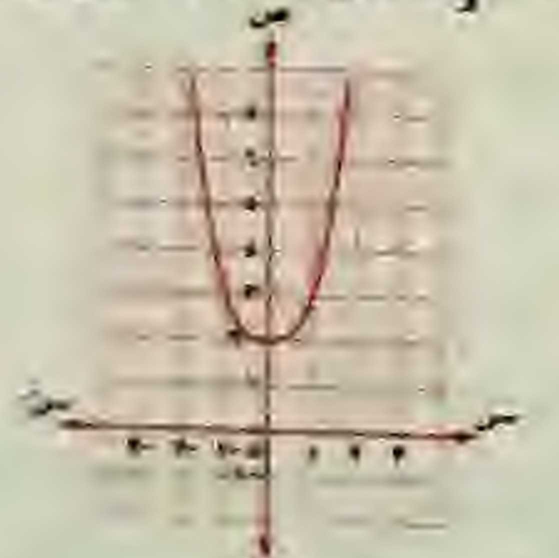
④ $د(س) = \begin{cases} -س^٢ & ، س \geq ٠ \\ س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$



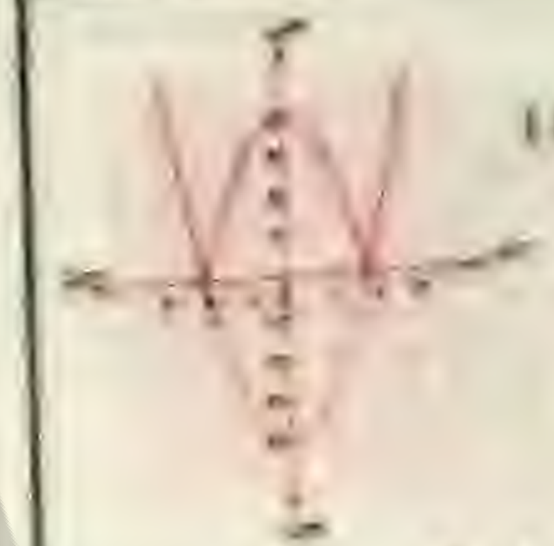
⑤ $د(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س > ٠ \\ -س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$



⑥ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & ، س \geq ٠ \\ -س^٢ + ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$



① د(س) = |س² − ٤|



- المدى = [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[

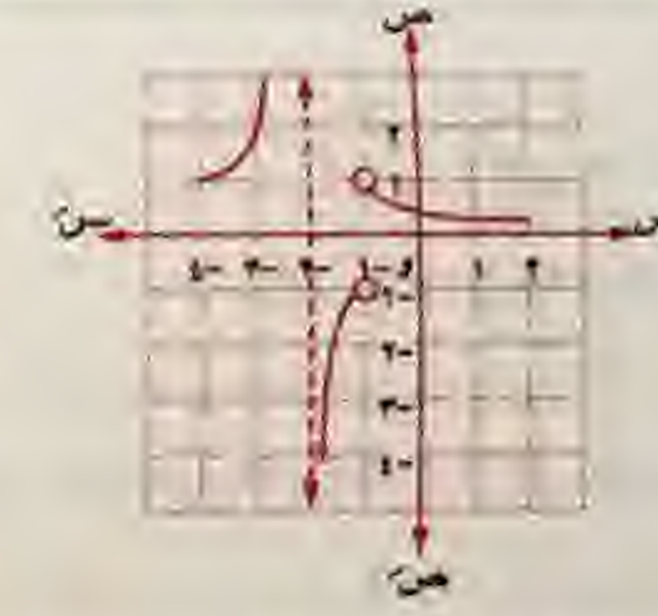
وتزايدية في]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

② د(س) = |س² − ٢س − ٣| ، س ∈]−١ ، ٤[



- المدى = [٠ ، ٤]
- الدالة تزايدية في]−١ ، ١[،]٣ ، ٤[

وتناقصية في]١ ، ٣[



• المجال = ح − {−١ ، −٢}

• المدى = ح − [−١ ، ٠[

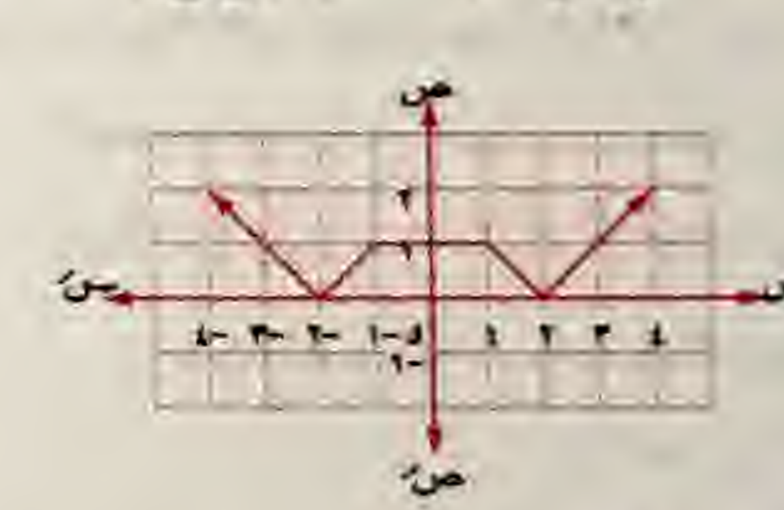
• الدالة تزايدية في كل من :

]−∞ ، −٢[،]−٢ ، −١[

، وتناقصية في]−١ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

④ د(س) =
- −س − ٢ ، س < −٢
- س + ٢ ، −٢ ≤ س ≤ −١
- ١ ، −١ < س < ١
- −س + ٢ ، ١ ≤ س < ٢
- س − ٢ ، س ≥ ٢



• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[

• الدالة تناقصية في كل من

]−∞ ، −٢[،]١ ، ٢[

، وتزايدية في كل من]−٢ ، −١[،]٢ ، ∞[

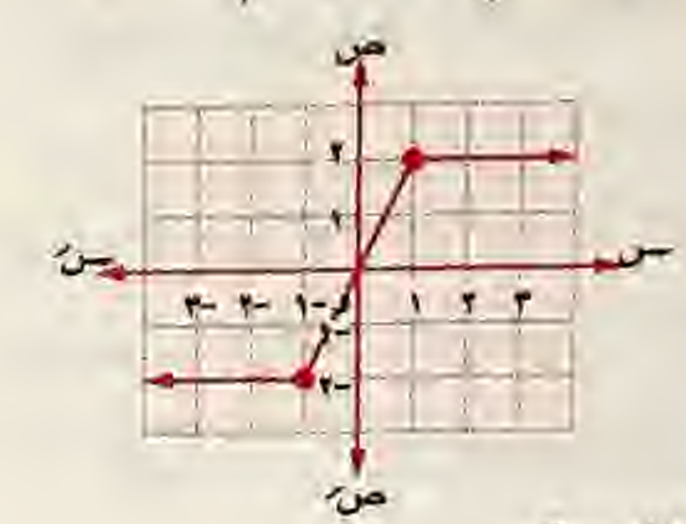
، وثابتة في]−١ ، ١[

• الدالة زوجية.

⑤ د(س) = |س + ١| − |س − ١|

=
- ٢ ، س > ١
- ٢س ، −١ ≤ س ≤ ١
- −٢ ، س < −١

	−١		١	
−س − ١		س + ١		س + ١
−س + ١		−س + ١		س − ١
−٢		٢س		٢



• المجال = ح

• المدى = [−٢ ، ٢]

• الدالة ثابتة في كل من]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

وتزايدية في]−١ ، ١[

• الدالة فردية.

إجابات تمارين 6

أولاً تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١

① ٤ |س| = ٢٠ ∴ |س| = ٥

∴ س = ± ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥ ، −٥}

② |٢س − ٣| = ٧ ∴ ٢س − ٣ = ± ٧

∴ ٢س − ٣ = ٧ ومنها ٢س = ١٠

∴ س = ٥

أ، ٢س − ٣ = −٧ ومنها ٢س = −٤

∴ س = −٢

∴ مجموعة الحل = {٥ ، −٢}

③ |س + ٢| = ١ ∴ س + ٢ = ± ١

∴ س = −١ أ، س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

④ ٢|س| = ٢ ∴ |س| = ١

∴ س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١}

⑤ عندما س ≥ ٢ : ∴ س − ٢ = ٣س − ٤

∴ ٢س = ٢ ∴ س = ١ ∉ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : ∴ −س + ٢ = ٣س − ٤

∴ ٤س = ٦ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∈]−∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٣}{٢}$}

⑥ عندما س ≥ −٢ : ∴ س + ٢ = س − ١ (مرفوض)

عندما س < −٢ : ∴ −س − ٢ = س − ١

∴ ٢س = −١ ∴ س = −$\frac{١}{٢}$ ∉]−∞ ، −٢[

∴ مجموعة الحل = ∅

⑦ عندما س ≥ −٢ : ∴ س + ٢ = −س + ٢

∴ ٢س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [−٢ ، ∞[

عندما س < −٢ :

∴ −س − ٢ = −س + ٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٠}

⑧ ∵ ٢|س| = ٥س − ٢١

عندما س ≥ ٠ : ∴ ٢س = ٥س − ٢١

∴ ٣س = ٢١ ∴ س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ −٢س = ٥س − ٢١

∴ ٧س = ٢١ ∴ س = ٣ ∉]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {٧}

⑨ |س + ٥| = |س − ٣|

∴ س + ٥ = ± (س − ٣)

∴ س + ٥ = س − ٣ (مرفوض)

أ، س + ٥ = −س + ٣ ∴ ٢س = −٢

∴ س = −١ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {−١}

⑩ ∵ ٢|(س − ٣)| = |س − ٣|

∴ ٢|س − ٣| = |س − ٣|

∴ |س − ٣| = ٠ ∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

⑪ |س − ١| = ٢|س − ٢|

∴ س − ١ = ± ٢(س − ٢)

∴ س − ١ = ٢س − ٤ ∴ س = ٣ (تحقق)

أ، س − ١ = −٢س + ٤ ∴ ٣س = ٥

∴ س = $\frac{٥}{٣}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، $\frac{٥}{٣}$}

⑫ عندما س ≥ ٠ : ∴ س² − ٥س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢)(س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[أ، س = ٣ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ س² + ٥س + ٦ = ٠

∴ (س + ٢)(س + ٣) = ٠

∴ س = −٢ ∈]−∞ ، ٠[

أ، س = −٣ ∈]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣ ، −٢ ، −٣}

⑬ ∵ $\sqrt{س^٢}$ − ٢س = ٦

∴ |س| − ٢س = ٦

عندما س ≥ ٠ : ∴ س − ٢س = ٦

∴ س = −٦ ∉ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ −س − ٢س = ٦

∴ ٢ س = -٦ ∴ س = -٣ ∈]-∞ ، ٠[
∴ مجموعة الحل = {-٣}

(١٤) ∵ $\sqrt{س^2 - ٤ س + ٤}$ = ٤
∴ $\sqrt{(س - ٢)^2}$ = ٤ ∴ |س - ٢| = ٤
∴ س - ٢ = ± ٤
∴ س - ٢ = ٤ ∴ س = ٦
أ، س - ٢ = -٤ ∴ س = -٢
∴ مجموعة الحل = {-٢ ، ٦}

(١٥) |س| + س = ٠
عندما س ≥ ٠ : ∴ س + س = ٠
∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ -س + س = صفر
∴ صفر = صفر وذلك متحقق لجميع قيم س < ٠
∴ مجموعة الحل =]-∞ ، ٠]

(١٦) عندما س ≥ -٣ : س + ٣ + ٢ س = ٠
∴ ٣ س = -٣ ∴ س = -١ ∈ [-٣ ، ∞[
عندما س < -٣ : ∴ -س - ٣ + ٢ س = ٠
∴ س = ٣ ∉]-∞ ، -٣[
∴ مجموعة الحل = {-١}

(١٧) ∴ $\sqrt{س^2 - ٦ س + ٩}$ + ٢ س = ٩
∴ $\sqrt{(س - ٣)^2}$ + ٢ س = ٩
∴ |س - ٣| + ٢ س = ٩
عندما س ≥ ٣ : ∴ س - ٣ + ٢ س = ٩
∴ ٣ س = ١٢ ∴ س = ٤ ∈ [٣ ، ∞[
عندما س < ٣ : ∴ -س + ٣ + ٢ س = ٩
∴ س = ٦ ∉]-∞ ، ٣[
∴ مجموعة الحل = {٤}

(١٨) |س - ٣| (|س - ٣| - ١) = ٠
∴ |س - ٣| = ٠ ومنها س = ٣
أ، |س - ٣| - ١ = ٠ ∴ |س - ٣| = ١
∴ س - ٣ = ± ١ ومنها س = ٢ أ، س = ٤
∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٢ ، ٤}

(١٩) ∵ ٥ |س - ٣| - ٢ $\sqrt{(س - ٣)^2}$ = ١٢
∴ ٥ |س - ٣| - ٢ |س - ٣| = ١٢
∴ ٣ |س - ٣| = ١٢ ∴ |س - ٣| = ٤
∴ س - ٣ = ± ٤ ومنها س = ٧ أ، س = -١
∴ مجموعة الحل = {٧ ، -١}

(٢٠) |س - ١| |س + ١| = |س - ١|
∴ |س - ١| (|س + ١| - ١) = ٠
∴ |س - ١| = ٠ ومنها س = ١
أ، |س + ١| - ١ = ٠ ∴ |س + ١| = ١
∴ س + ١ = ± ١
ومنها س = ٠ أ، س = -٢
∴ مجموعة الحل = {١ ، ٠ ، -٢}

(٢١) |س² - ١| = ٢٦ ∴ س² - ١ = ± ٢٦
∴ س² = -٢٥ (مرفوض) أ، س² = ٢٧
ومنها س = ± ٣ $\sqrt{٣}$
∴ مجموعة الحل = {٣ $\sqrt{٣}$ ، -٣ $\sqrt{٣}$}

(٢٢) (|س + ١| + ٢) (|س + ١| - ٥) = ٠
∴ |س + ١| + ٢ = ٠
∴ |س + ١| = -٢ (مرفوض)
أ، |س + ١| - ٥ = ٠ ∴ |س + ١| = ٥
∴ س + ١ = ± ٥ ومنها س = ٤ أ، س = -٦
∴ مجموعة الحل = {٤ ، -٦}

(٢٣) |س - ٥|² = ٢ |س - ٥|
∴ |س - ٥| (|س - ٥| - ٢) = ٠
∴ |س - ٥| = ٠ ومنها س = ٥
أ، |س - ٥| - ٢ = ٠ ∴ |س - ٥| = ٢
ومنها س - ٥ = ± ٢
∴ س = ٧ أ، س = ٣
∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٧ ، ٣}

(٢٤) ∵ س |س| = س
∴ س (|س| - ١) = ٠
∴ س = ٠ أ، |س| - ١ = ٠
∴ |س| = ١ ∴ س = ± ١
∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١ ، -١}

(٢٥) س |س - ٥| - ٦ = ٠
عندما س ≥ ٥ : ∴ س² - ٥ س - ٦ = ٠
∴ (س - ٦) (س + ١) = ٠
∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[أ، س = -١ ∉ [٥ ، ∞[
عندما س < ٥ : -س² + ٥ س - ٦ = ٠
∴ س² - ٥ س + ٦ = ٠
∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠
∴ س = ٢ ∈]-∞ ، ٥[
أ، س = ٣ ∈]-∞ ، ٥[
∴ مجموعة الحل = {٦ ، ٢ ، ٣}

(٢٦) س² + س - ١٠ = ± ١٠
∴ س² + س - ١٠ = -١٠
∴ س² + س = ٠ ∴ س (س + ١) = ٠
∴ س = ٠ أ، س = -١
أ، س² + س - ١٠ = ١٠
∴ س² + س - ٢٠ = ٠
∴ (س + ٥) (س - ٤) = ٠
∴ س = -٥ أ، س = ٤
∴ مجموعة الحل = {٠ ، -١ ، -٥ ، ٤}

(٢٧) س |س - ٢| = ٤ س - ٨
عندما س > ٢ : ∴ س (س - ٢) = ٤ س - ٨
∴ س² - ٢ س - ٤ س + ٨ = ٠
∴ س² - ٦ س + ٨ = ٠
∴ (س - ٢) (س - ٤) = ٠
∴ س = ٢ ∉]٢ ، ∞[
أ، س = ٤ ∈]٢ ، ∞[
عندما س < ٢ : ∴ س (-س + ٢) = ٤ س - ٨
∴ -س² + ٢ س = ٤ س - ٨
∴ س² + ٢ س - ٨ = ٠
∴ (س + ٤) (س - ٢) = ٠
∴ س = -٤ ∈]-∞ ، ٢[
أ، س = ٢ ∉]-∞ ، ٢[
∴ مجموعة الحل = {٤ ، -٤}

(٢٨) س² |س| = ٨ س
عندما س ≥ ٠ : ∴ س² × س = ٨ س
∴ س³ - ٨ س = ٠ ∴ س (س² - ٨) = ٠
∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[
أ، س² - ٨ = ٠ ∴ س² = ٨
∴ س = ٢ $\sqrt{٢}$ ∈ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ س² × -س = ٨ س
∴ س³ + ٨ س = ٠ ∴ س (س² + ٨) = ٠
∴ س = ٠ ∉]-∞ ، ٠[
أ، س² + ٨ = ٠ ∴ س² = -٨

∴ س = -٢ ∈]-∞ ، ٠[
∴ مجموعة الحل = {...}
(٤) ∵ $\sqrt{(س - ٢)^2}$ = ٣ ∴ |س - ٢| = ٣

∴ مجموعة الحل = {٤ ، -٦}

∴ س^٢ + س - ٢٠ = ٠

أ س^٢ + ٨ = ٠ ∴ س^٢ = -٨

∴ س = -٢ ∈]-∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {-٢ ، ٠ ، ٢}

٢

- تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك.
- نرسم منحنيي الدالتين د (س) ، ر (س) فتكون الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين هي مجموعة حل المعادلة.

① ∵ |س| = ٤ ∴ د (س) = |س|

، ر (س) = ٤



من الرسم : مجموعة الحل = {٤ ، -٤}

② ∵ |س| = -٢ ∴ د (س) = |س|

، ر (س) = -٢



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

③ ∵ |س + ٢| = ٢ ∴ د (س) = |س + ٢|

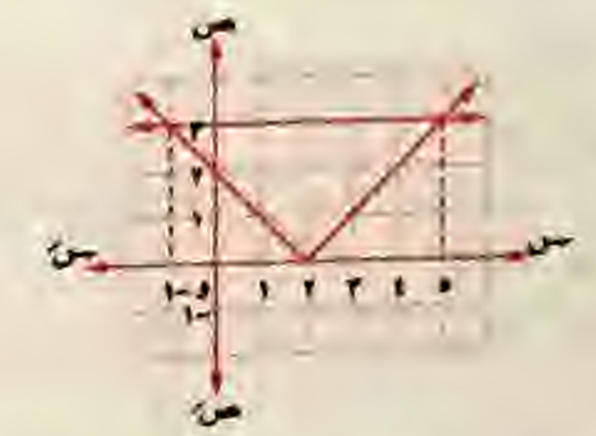
، ر (س) = ٢



من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، -٤}

④ ∵ √(س - ٢)^٢ = ٣ ∴ |س - ٢| = ٣

∴ د (س) = |س - ٢| ، ر (س) = ٣



من الرسم : مجموعة الحل = {٥ ، -١}

⑤ ∵ |س + ٣| = ٥ - س

∴ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = ٥ - س



من الرسم : مجموعة الحل = {١}

⑥ د (س) = |س - ٢| ، ر (س) = ٣ س - ٤



من الرسم : مجموعة الحل = {١ ١/٢}

⑦ د (س) = ٢ |س + ٢|

، ر (س) = ١ - س



من الرسم : مجموعة الحل = {-١ ، -٥}

⑧ د (س) = ٢ |س + ٥/٢|

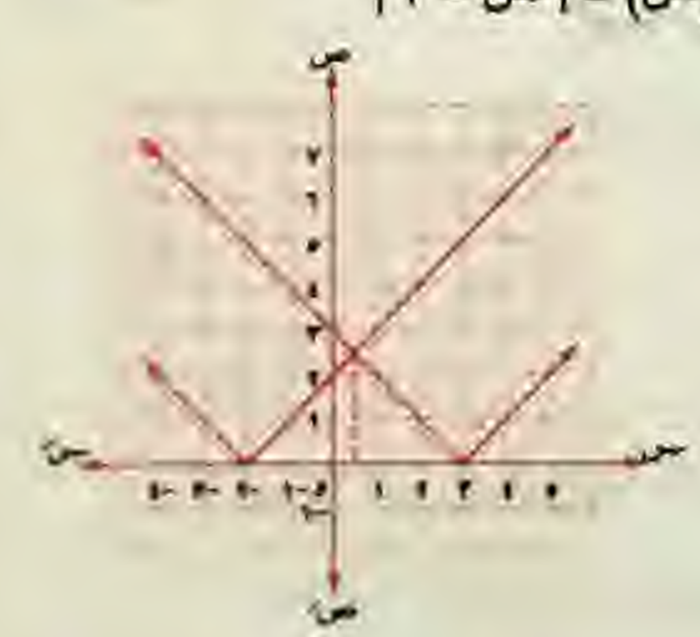
، ر (س) = س - ٤



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

⑨ د (س) = |س + ٢|

، ر (س) = |س - ٣|



من الرسم : مجموعة الحل = {١/٢}

⑩ ∵ |س - ٢| = - |س - ١|

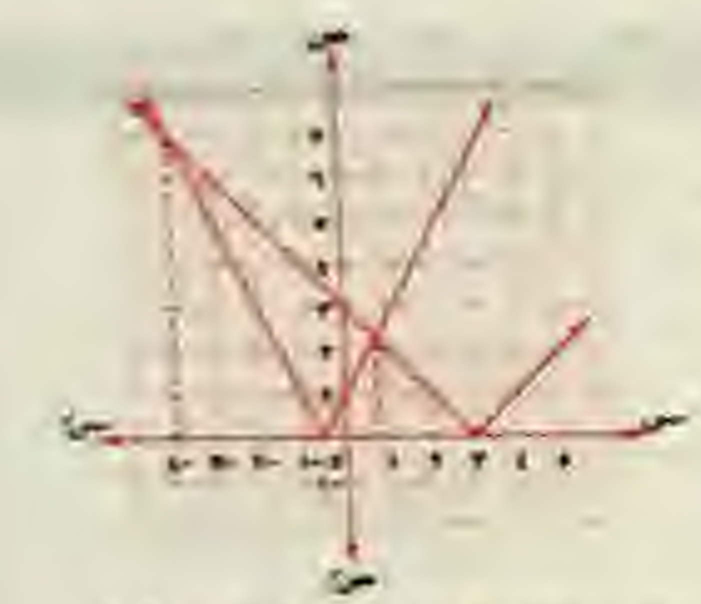
∴ د (س) = |س - ٢|

، ر (س) = - |س - ١|



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

⑪ د (س) = |س - ٣| ، ر (س) = |٢ س + ١|



من الرسم : مجموعة الحل = {-٤ ، ٢/٣}

⑫ د (س) = |س - ٤| ، ر (س) = ٤ - س



من الرسم : مجموعة الحل =]-∞ ، ٤]

(١٣) د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = س + ٢



من الرسم : مجموعة الحل = [-٢ ، ∞[

(١٤) ∵ |س - ٣| = |س + ٢| + ٥

∴ د (س) = |س - ٣|

، ر (س) = |س + ٢| + ٥



من الرسم : مجموعة الحل =]-∞ ، -٢]

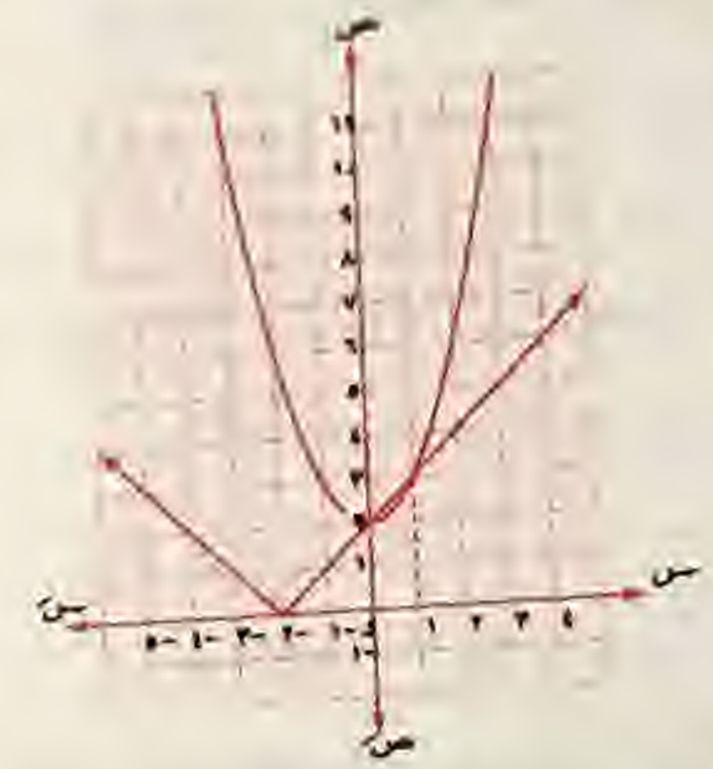
(١٥) د (س) = |س - ٣|

، ر (س) = ٤ - |س + ١|



من الرسم : مجموعة الحل = [-١ ، ٣]

(١٦) د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = $س^٢$ + ٢



من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، ١}

٣

د (-س) = $\frac{١٢}{|-س| + ٢}$ = $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

∵ د (س) = ٢ ∴ $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ = ٢

∴ |س| + ٢ = ٦ ∴ |س| = ٤

∴ س = ± ٤

∴ مجموعة الحل = {-٤ ، ٤}

٤

د (س) = ٢ |س + $\frac{٥}{٢}$| - ٢

من الرسم :



* المدى = [-٢ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، -$\frac{٥}{٢}$[
* وتزايدية في]-$\frac{٥}{٢}$ ، ∞[
* مجموعة الحل = {-١ ، -٤}

الحل الجبري : ∵ |٢ س + ٥| = ٣

∴ ٢ س + ٥ = ± ٣

∴ ٢ س + ٥ = ٣ ومنها س = -١

أ، ٢ س + ٥ = -٣ ومنها س = -٤

٥

من الرسم :

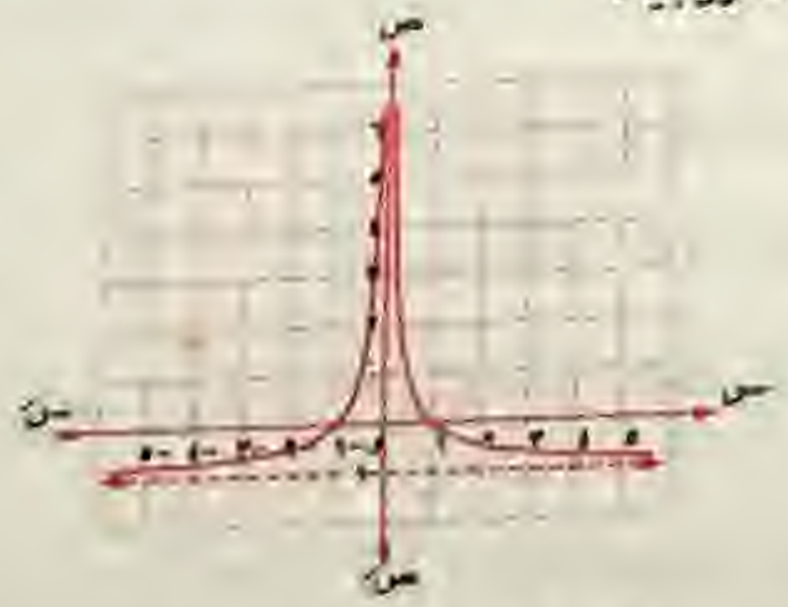


* المدى =]-∞ ، ١]
* الدالة تزايدية في]-∞ ، ٠[
* وتناقصية في]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.
* مجموعة الحل = {-٢ ، ٢} ويمكنك التحقق منها جبريًا.

٦

د (-س) = $\frac{١ - |-س|}{|-س|}$ = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.



∴ د (س) = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ = $\frac{١}{|س|}$ - ١

من الرسم : مجموعة الحل = {-١ ، ١}

٧

د (س) = { $\frac{٢ س}{٢}$ ، س ≥ ١ ؛ ... ، س < ١ }

من الرسم :



* المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة ثابتة في]-∞ ، ١]
* وتزايدية في]١ ، ∞[
* مجموعة الحل = {$\frac{٣}{٢}$}

٨

د (س) = { $س^٢$ ، س ≥ ٠ ؛ $-س^٢$ ، س < ٠ }



من الرسم : مجموعة الحل = {-١ ، ١}

ثانيًا تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩

(١) -٥ ≤ س - ٣ ≤ ٥ ∴ -٢ ≤ س ≤ ٨

∴ مجموعة الحل = [-٢ ، ٨]

(٢) س - ٣ ≥ ٥ ومنها س ≥ ٨

أ، س - ٣ ≤ -٥ ومنها س ≤ -٢

∴ مجموعة الحل = ح -]-٢ ، ٨[

(٣) ٢ س + ٥ > ٣ ومنها س > -١

أ، ٢ س + ٥ < -٣ ومنها س < -٤

مجموعة الحل = ح - [-٤ ، -١]

(٤) ∴ |س - ٣| < ٧ ∴ -٧ < س - ٣ < ٧

∴ -٤ < س < ١٠

∴ مجموعة الحل =]-٤ ، ١٠[

∴ مجموعة الحل =]-٤ ، ٠[

⑤ -١ ≤ (س - ٣)/٤ ≤ ١

∴ -٤ ≤ س - ٣ ≤ ٤ ∴ -١ ≤ س ≤ ٧

∴ مجموعة الحل = [-١ ، ٧]

⑥ |٢س + ٢| < -١ ∴ مجموعة الحل = ∅

⑦ ∵ 1/|٢س - ٥| ≥ ٢ ∴ |٢س - ٥| ≤ ½

∴ -½ ≤ ٢س - ٥ ≤ ½

∴ ٤½ ≤ ٢س ≤ ٥½ ∴ ٩/٤ ≤ س ≤ ١١/٤

، ∵ |٢س - ٥| = ٠ عندما س = ٥/٢

∴ مجموعة الحل = [٩/٤ ، ١١/٤] - {٥/٢}

⑧ ∵ 1/|٣س| ≥ ٥ ∴ |٣س| ≤ ١/٥

∴ -١/٥ ≤ ٣س ≤ ١/٥ ∴ -١/١٥ ≤ س ≤ ١/١٥

، ∵ |٣س| = ٠ عندما س = ٠

∴ مجموعة الحل = [-١/١٥ ، ١/١٥] - {٠}

⑨ ∵ 1/|٢س - ٣| > ٢ ∴ |٢س - ٣| < ½

∴ -½ < ٢س - ٣ < ½

∴ ٥/٢ < ٢س < ٧/٢ ∴ ٥/٤ < س < ٧/٤

، ∵ |٢س - ٣| = ٠ عندما س = ٣/٢

∴ مجموعة الحل =]٥/٤ ، ٧/٤[- {٣/٢}

⑩ |٢س - ٣| > ٤

∴ ٢س - ٣ > ٤ ومنها س > ٧/٢

أو ٢س - ٣ < -٤ ومنها س < -½

∴ مجموعة الحل = ح - [-½ ، ٧/٢]

⑪ ∵ √((س - ١)²) ≤ ٤ ∴ |س - ١| ≤ ٤

∴ س - ١ ≤ ٤ ومنها س ≤ ٥

أو س - ١ ≥ -٤ ومنها س ≥ -٣

∴ مجموعة الحل = ح -]-٣ ، ٥[

⑫ ∵ √((٢س - ٣)²) ≤ ٩ ∴ |٢س - ٣| ≤ ٩

∴ -٩ ≤ ٢س - ٣ ≤ ٩

∴ -٦ ≤ ٢س ≤ ١٢ ∴ -٣ ≤ س ≤ ٦

∴ مجموعة الحل = [-٣ ، ٦]

⑬ ٢|س - ٢| < ٦ ∴ |س - ٢| < ٣

∴ -٣ < س - ٢ < ٣ ∴ -١ < س < ٥

∴ مجموعة الحل =]-١ ، ٥[

⑭ |٣س - ٢| + ٢ × ٢|٣س - ٢| ≥ ٢٠

∴ ٥|٣س - ٢| ≥ ٢٠

∴ |٣س - ٢| ≥ ٤

∴ ٣س - ٢ ≥ ٤ ومنها س ≥ ٢

أو ٣س - ٢ ≤ -٤ ومنها س ≤ -٢/٣

∴ مجموعة الحل = ح -]-٢/٣ ، ٢[

⑮ |س + ٢| + ٢|س + ٢| ≥ ٦

∴ ٣|س + ٢| ≥ ٦ ∴ |س + ٢| ≥ ٢

∴ س + ٢ ≥ ٢ ومنها س ≥ ٠

أو س + ٢ ≤ -٢ ومنها س ≤ -٤

∴ مجموعة الحل = ح -]-٤ ، ٠[

١٠

①]-٤ ، ٠[② ح - [-١ ، ٥]

③]-٥ ، -١[

١١

تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك

① د(س) = |س - ١| ، ر(س) = ٢



من الرسم : مجموعة الحل = [-١ ، ٣]

② د(س) = ٢|س - ٥/٢| ، ر(س) = ٢



من الرسم : مجموعة الحل = ح -]٣/٢ ، ٧/٢[

③ ∵ √(٤س² - ١٢س + ٩) = √((٢س - ٣)²)

= |٢س - ٣|

∴ د(س) = |٢س - ٣| = ٢|س - ٣/٢|

، ر(س) = ٥



من الرسم : مجموعة الحل = ح - [-١ ، ٤]

④ د(س) = |س + ٣| ، ر(س) = -س



من الرسم : مجموعة الحل =]-∞ ، -٣/٢]

⑤ د(س) = |س - ٢| ، ر(س) = -½ س + ٦

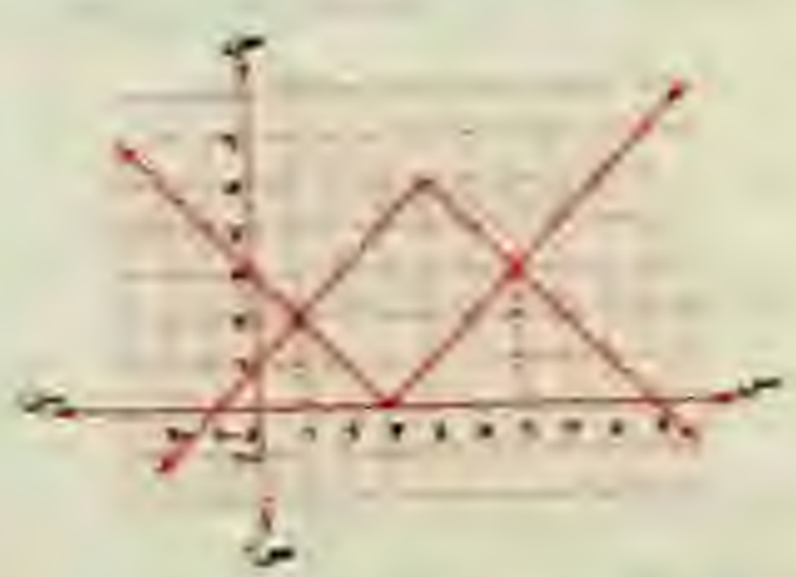


من الرسم : مجموعة الحل =]-٦ ، ٦[

⑥ ∵ |س - ٢| < ٥ - |س - ٤|

∴ د(س) = |س - ٢|

، ر(س) = ٥ - |س - ٤|



من الرسم : مجموعة الحل = ح - [١ ، ٦]

١٢

① ∵ -٤ ≤ س ≤ ٤ ∴ |س| ≤ ٤

② ∵ ٠ < س < ٦ بإضافة (-٣) إلى أطراف المتباينة.

∴ -٣ < س - ٣ < ٣ ∴ |س - ٣| < ٣

③ ∵ س ≥ -٢ أ، س ≤ ٢ ∴ |س| ≤ ٢

④ ∵ س ∈ ح - [-٢ ، ٦]

∴ س > ٦ ، س < -٢

وبإضافة (-٢) إلى أطراف المتباينة

∴ س - ٢ > ٤ ، س - ٢ < -٤

∴ |س - ٢| > ٤

١٣

① نفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٦٠ < س < ١٠٠

وبإضافة (- ٨٠) إلى أطراف المتباينة

∴ -٢٠ < س - ٨٠ < ٢٠

∴ |س - ٨٠| < ٢٠

② نفرض أن درجة الحرارة = س درجة

∴ ٣٥ < س < ٤٢

وبإضافة (- ٣٨,٥) إلى أطراف المتباينة

∴ - ٣,٥ < س - ٣٨,٥ < ٣,٥

∴ |س - ٣٨,٥| < ٣,٥

③ نفرض أن العمق الذى تعيش فيه الطحالب الخضراء = س مترًا

∴ ٠ ≤ س ≤ ٣٠

وبإضافة (-١٥) إلى أطراف المتباينة

∴ -١٥ ≤ س - ١٥ ≤ ١٥

∴ |س - ١٥| ≤ ١٥

∴ س = ±١

∴ المجال = ح - {١ ، -١}

② بوضع |س| + ١ = ٠ ∴ |س| = -١ (تعارض)

∴ المجال = ح

③ بوضع |س - ٢| - ٥ = ٠ ∴ |س - ٢| = ٥

∴ س - ٢ = ٥ ومنها س = ٧

أ، س - ٢ = -٥ ومنها س = -٣

∴ المجال = ح - {٧ ، -٣}

④ بوضع ٥ - |س| ≥ ٠ ∴ |س| ≤ ٥

∴ -٥ ≤ س ≤ ٥ ∴ المجال = [-٥ ، ٥]

⑤ بوضع |س| - ٥ ≥ ٠ ∴ |س| ≥ ٥

∴ س ≥ ٥ أ، س ≤ -٥

∴ المجال = ح -]-٥ ، ٥[

⑥ بوضع ٥ - |س| > ٠ ∴ |س| < ٥

∴ -٥ < س < ٥ ∴ المجال =]-٥ ، ٥[

١٥

① د (-س) = -س |-س| = -س |س|

= - د (س) ∴ الدالة فردية.

② د (-س) = $(-س)^2$ |-س| - ١

= $س^2$ |س| - ١ = د (س) ∴ الدالة زوجية.

③ د (-س) = $\frac{|١ - س| + |١ + س|}{|١ - س| - |س + ١|}$ = - د (س)

∴ الدالة فردية.

④ د (-س) = $\frac{(-س)^2 \text{ حتا}(-٢ س)}{|-٢ س| + ٥}$

= $\frac{س^2 \text{ حتا } ٢ س}{|٢ س| + ٥}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

⑤ د (-س)

= ٢ |-س| طا (-س) + ٢ (-س) |طا (-س)|

= ٢ |س| (- طا س) - ٢ س | - طا س |

= -٢ |س| طا س - ٢ س |طا س |

= - د (س) ∴ الدالة فردية

⑥ د (-س) = $\sqrt{|-س| + (-س)}$ = $\sqrt{|س| - س}$

≠ د (س) ≠ - د (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

١٦

① (ب) ② (ب) ③ (ج) ④ (ج) ⑤ (ج)

⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (ب) ⑨ (د) ⑩ (ج)

١٧

① د (س) = |س + ٣| + ٢ ، ر (س) = ٤



∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٢

= ٤ وحدة مربعة.

② د (س) = - |س - ٢| + ٣ ، ر (س) = صفر



∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب حـ

= $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة.

③ د (س) = |س - ٢| - ١

، ر (س) = ٥ - |س - ٢|



∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب حـ ء = $\frac{1}{2}$ (أحـ)^2

= $\frac{1}{2}$ × ٦^2 = ١٨ وحدة مربعة.

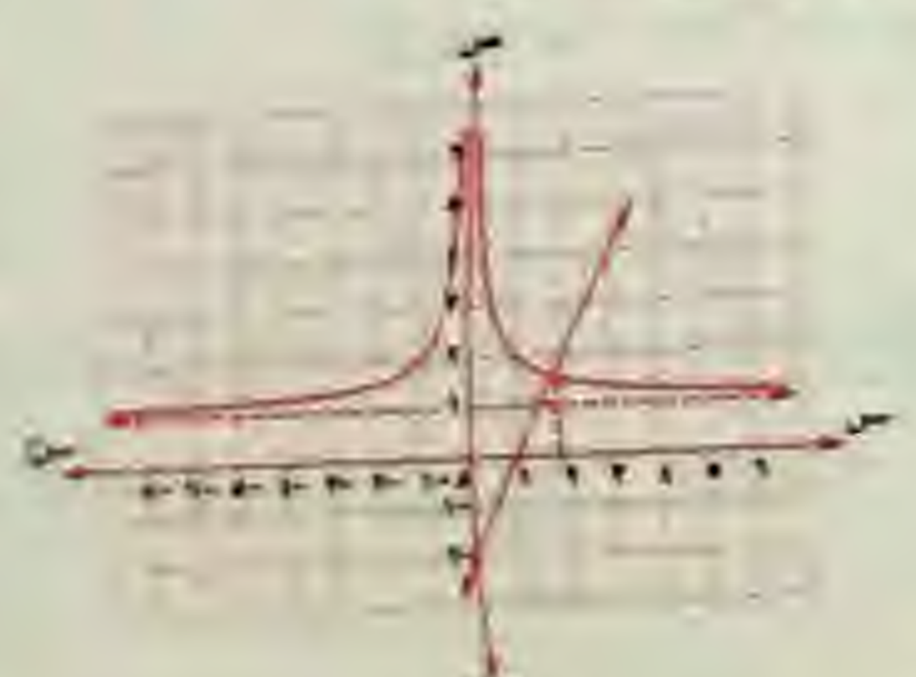
١٨

د (-س) = $\frac{|-س| + ١}{|-س|}$ = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية. ∵ د (س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ = ١ + $\frac{1}{|س|}$

بيانيًا :

وبوضع ر (س) = ٣ س - ٢



من الرسم : س = ١,٨

∴ مجموعة الحل = {١,٨}

جبريًا : ∵ د(س) = { 1/س + 1 ، س > 0 ؛ −1/س + 1 ، س < 0 }

عندما س > 0 : ∴ 1/س + 1 = 2س − 2

∴ 1/س = 2س − 3 (بالضرب فى س)

∴ 1 = 2س² − 3س

∴ 2س² − 3س − 1 = 0

∴ س = (3 ± √(9 − 4 × 2 × −1)) / (2 × 2) = (3 ± √17) / 4

∴ س ≈ 1.8 ∈]0 ، ∞[

أ، س = −0.3 ∉]0 ، ∞[

عندما س < 0 : ∴ −1/س + 1 = 2س − 2

∴ −1/س = 2س − 3 (بالضرب فى س)

∴ −1 = 2س² − 3س

∴ 2س² − 3س + 1 = 0

∴ (2س − 1)(س − 1) = 0

∴ س = 1/2 ∉]−∞ ، 0[

أ، س = 1 ∉]−∞ ، 0[

∴ مجموعة الحل = {1.8}

19

① (د) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (أ) ⑦ (أ) ⑧ (جـ) ⑨ (ب)

إرشادات لحل رقم 19

① ∵ |س + 1|² + |2س + 3| = 0

∴ س + 1 = 0 ومنها س = −1

وفى نفس الوقت يكون 2س + 3 = 0 ومنها س = −3/2

وهذا تعارض.

∴ مجموعة الحل = ∅

② ∵ |(س − 1)(س − 2)| = |س − 2|

∴ |س − 2||س − 1| − |س − 2| = 0

∴ |س − 2|(|س − 1| − 1) = 0

∴ |س − 2| = 0 ومنها س = 2

أ، |س − 1| = 1

∴ س − 1 = ± 1 ومنها س = 0 أ، 2

∴ مجموعة الحل = {0 ، 2 ، 2}

③ ∵ |س| + |ص| ≥ |س + ص|

∴ (|س| + |ص|) / |س + ص| ≥ 1

∴ أصغر قيمة للمقدار (|س| + |ص|) / |س + ص| هى 1

④ ∵ 32 < 61 < 64

∴ 2⁵ < 2^س < 2⁶ ∴ 5 < س < 6

∴ |س − 6| = −س + 6

، |س − 5| = س − 5

∴ |س − 6| + |س − 5|

= −س + 6 + س − 5 = 1

⑤ ∵ أ²ب > 0 ∴ ب موجبة.

، ∵ أ/ب < 0 ∴ أ سالبة.

∴ √(أ²) = |أ| = −أ ، √(ب²) = |ب| = ب

∴ √(أ²) + √(ب²) − (ب − أ)

= −أ + ب − ب + أ = صفر

⑥ ∵ −4 ≤ س ≤ 6

∴ −16 ≤ 4س ≤ 24

∴ −24 ≤ 4س − 8 ≤ 16

∴ 0 ≤ |4س − 8| ≤ 24

∴ أ = صفر ، ب = 24

∴ أ + ب = 24

⑦ ∵ س² − 3|س| − 10 = 0

∴ |س|² − 3|س| − 10 = 0

∴ (|س| − 5)(|س| + 2) = 0

∴ |س| = 5 ومنها س = ± 5

أ، |س| = −2 (مرفوض)

∴ جذرا المعادلة هما ± 5

∴ حاصل ضرب جذرى المعادلة يساوى −25

⑧ ∵ 3 < |س| < 8 ∴ 3 < س < 8

∴ س = 4 أ، 5 أ، 6 أ، 7

أ، −8 < س < −3

∴ س = −4 أ، −5 أ، −6 أ، −7

∴ عدد قيم س الصحيحة هو 8

⑨ ∵ (ر ∘ د)(س) = 3

∴ ر(د(س)) = 3

∴ ||2س − 5| + 1| = 3

∴ |2س − 5| + 1 = ± 3

∴ |2س − 5| = ± 3 − 1

∴ |2س − 5| = −4 (مرفوض)

أ، |2س − 5| = 2 ∴ 2س − 5 = ± 2

∴ 2س = 5 ± 2

∴ 2س = 7 ومنها س = 7/2

أ، 2س = 3 ومنها س = 3/2

∴ مجموعة الحل = {7/2 ، 3/2}

20

① (س + 1)(|س| − 1) + 1/2 = صفر

عندما س ≥ 0 :

∴ (س + 1)(س − 1) + 1/2 = 0

∴ س² − 1 + 1/2 = 0

∴ س² − 1/2 = 0

∴ س = 1/√2 ∈]0 ، ∞[

أ، س = −1/√2 ∉]0 ، ∞[

، عندما س < 0 :

∴ (س + 1)(−س − 1) + 1/2 = 0

∴ −(س + 1)² + 1/2 = 0

∴ (س + 1)² = 1/2 ∴ س + 1 = ± 1/√2

∴ س = (−1 + 1/√2) ∈]−∞ ، 0[

∴ س = (−1 − 1/√2) ∈]−∞ ، 0[

∴ مجموعة الحل

= {1/√2 ، −1 − 1/√2 ، −1 + 1/√2}

② ∵ ||2س + 3| − 8| = 5

∴ |2س + 3| − 8 = ± 5

∴ |2س + 3| = 8 ± 5

∴ |2س + 3| = 13 أ، |2س + 3| = 3

∴ 2س + 3 = ± 13 | 2س + 3 = ± 3

∴ 2س = −3 ± 13 | ∴ 2س = −3 ± 3

∴ س = −8 أ، 5 | ∴ س = صفر أ، −3

∴ مجموعة الحل = {−8 ، 5 ، صفر ، −3}

③ |س|² − 3|س| + 2 = 0

∴ (|س| − 2)(|س| − 1) = 0

∴ |س| = 2 ومنها س = ± 2

أ، |س| = 1 ومنها س = ± 1

∴ مجموعة الحل = {2 ، −2 ، 1 ، −1}

④ √((س − 1/س)² + 4) = 2

∴ √(س² − 2 + 1/س² + 4) = 2

$\therefore \sqrt{س^2 + 2 + \frac{1}{س^2}} = 2$

$\therefore \sqrt{(س + \frac{1}{س})^2} = 2$ $\therefore |س + \frac{1}{س}| = 2$

$\therefore س + \frac{1}{س} = \pm 2$ $\therefore س + \frac{1}{س} = 2$

ومنها $س^2 - 2س + 1 = 0$

$\therefore (س - 1)^2 = 0$ $\therefore س = 1$

أ، $س + \frac{1}{س} = -2$

ومنها $س^2 + 2س + 1 = 0$

$\therefore (س + 1)^2 = 0$ $\therefore س = -1$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{1 ، -1\}$

⑤ $\because |س^2 - 2| + \frac{2}{|س^2 - 2|} = 3$

$\therefore |س^2 - 2|^2 - 3|س^2 - 2| + 2 = 0$

$\therefore (|س^2 - 2| - 1)(|س^2 - 2| - 2) = 0$

$\therefore |س^2 - 2| - 1 = 0$ أ، $|س^2 - 2| - 2 = 0$

$\therefore |س^2 - 2| = 1$ $\therefore |س^2 - 2| = 2$

$\therefore س^2 - 2 = \pm 1$ $\therefore س^2 - 2 = \pm 2$

$\therefore س^2 = 2 \pm 1$ $\therefore س^2 = 2 \pm 2$

$\therefore س^2 = 4$ $\therefore س^2 = 0$

ومنها $س = \pm 2$ ومنها $س = \pm \sqrt{0}$

أ، $س^2 = 2$ أ، $س^2 = 1$

ومنها $س = \pm \sqrt{2}$ ومنها $س = \pm 1$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\pm 2 ، \pm \sqrt{2} ، \pm \sqrt{0} ، \pm 1\}$

⑥ $|س - 4| + |س - 2| = 10$

$س - 4$	$4 - س$	$4 - س$
$س - 2$	$س - 2$	$2 - س$
$2س - 6$	2	$6 - 2س$

[illegible]

$\therefore س = 8$ (يحقق)

، عندما $س < 2$ $\therefore 6 - 2س = 10$

$\therefore س = -2$ (يحقق)

عندما $2 < س < 4$ $\therefore 2 = 10$ تعارض

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{8 ، -2\}$

⑦ $\because (|2س - 3| - 5)(|2س - 3| + 5) > 11$

$\therefore |2س - 3|^2 - 25 > 11$

$\therefore |2س - 3|^2 > 36$

$\therefore |2س - 3| > 6$

$\therefore 2س - 3 > 6$ ومنها $س > \frac{9}{2}$

أ، $2س - 3 < -6$ ومنها $س < \frac{-3}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل = ح $- [\frac{-3}{2} ، \frac{9}{2}]$

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

1

① ع $(10) = 8 \times 10 = 80$ سم/ث

② ع $(150) = 80$ سم/ث

③ ع $(210) = -4 \times 210 + 880 = 40$ سم/ث

2

ح (ل) = 4 ل

① ح $(3) = 4 \times 3 = 12$ وحدة طول.

② ح $(\frac{15}{4}) = 4 \times \frac{15}{4} = 15$ وحدة طول.

3

م (نق) = π نق^2

① م $(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\pi$ وحدة مربعة.

② م $(0) = 25\pi$ وحدة مربعة.

4

① د (س) = $3{,}0 + 8 \times 7$ س

② نعم دالة أحادية لأنه بفرض أ ، ب $\in$ مجال الدالة

$\because$ د (أ) $= 3{,}0 + 8 \times 7$ أ

، د (ب) $= 3{,}0 + 8 \times 7$ ب

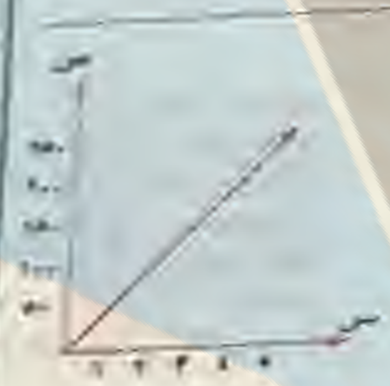
وبفرض أن د (أ) = د (ب)

$\therefore 3{,}0 + 8 \times 7$ أ $= 3{,}0 + 8 \times 7$ ب

$\therefore$ أ = ب

5

د (س) = 50 س



6

$\because$ ف = ع × ن

، $\because$ ن = 3 دقائق ، ع = 30 مترًا/دقيقة

$\therefore$ ف $= 3 \times 30 = 90$ $\therefore$ ع $= \frac{90}{ن}$

$\therefore$ ع $\propto \frac{1}{ن}$

$\therefore$ ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن.

* ع $= \frac{90}{ن}$ * عندما ع = 45 مترًا/دقيقة.

$\therefore 45 = \frac{90}{ن}$ $\therefore$ ن $= \frac{90}{45} = 2$ دقيقة.



7

① $\because$ النقطة $(-1 ، 3)$ تنتمي لمنحنى الدالة

$\therefore (-1 ، 3)$ تحقق معادلة الدالة

د (س) = أ (س − 3)^2 + 4

$\therefore 3 = $ أ $(-1 - 3)^2 + 4$ $\therefore 3 = 16$ أ $+ 4$

$\therefore 16$ أ $= -1$ $\therefore$ أ $= -\frac{1}{16}$

② $\because$ نقطة رأس المنحنى هي $(3 ، 4)$

$\therefore$ أقصى ارتفاع للبوابة = 4 أمتار

③ عرض البوابة = 2 + 2 = 4 أمتار

8

①



من الرسم:

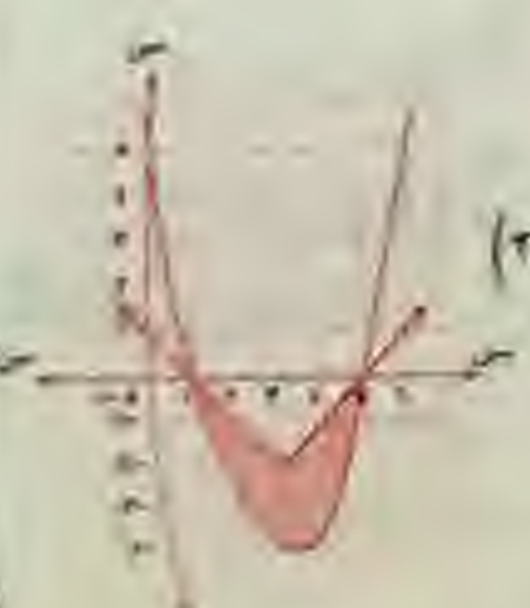
ل = 4 وحدة طول.

، ع = 4 وحدة طول

$\therefore$ المساحة المطلوبة

$= \frac{2}{3}$ ل ع $= \frac{2}{3} \times 4 \times 4 = \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

②



المساحة المطلوبة

$= \frac{32}{3} - (\frac{1}{2} \times 4 \times 2)$

$= \frac{32}{3} - 4$

$= \frac{20}{3}$ وحدة مربعة.

9

د (س) = |س − 2| − 2 ، ر (س) = 2

11

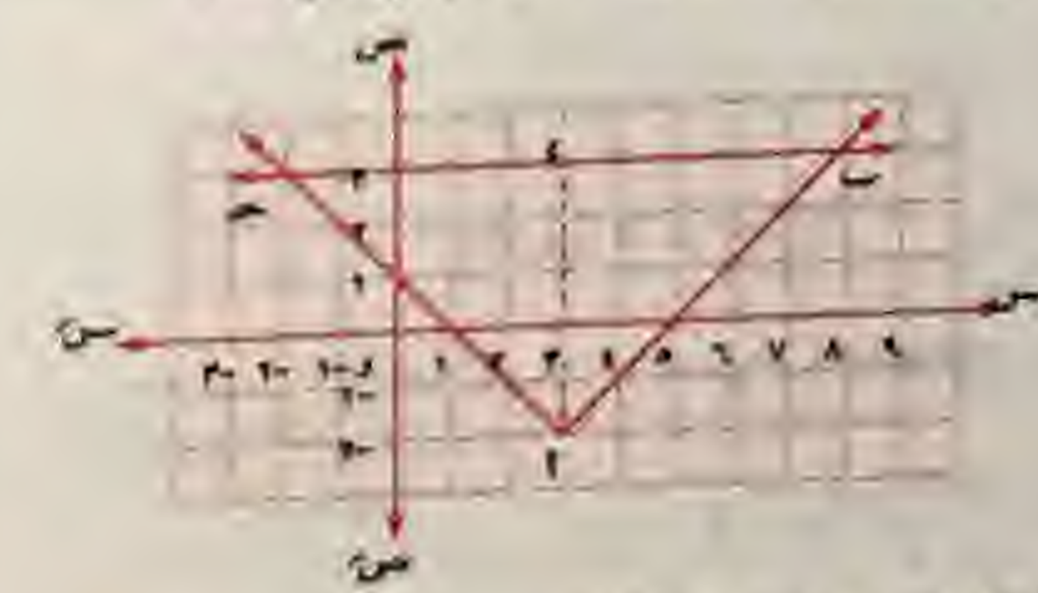
بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

إجابات الوحدة الثانية

⑤ $(18)^{\frac{1}{2}} \times (12)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{(24)^{\frac{3}{2}}}$

٩

د (س) = | س − ٣ | − ٢ ، ر (س) = ٣



∵ طول الوحدة = ٨ أمتار.

، ∵ ب حـ = ١٠ وحدات.

∴ طول القاعدة = ١٠ × ٨ = ٨٠ متر.

، ∵ أ ء = ٥ وحدات.

∴ الارتفاع = ٥ × ٨ = ٤٠ متر.

∴ مساحة الأرض = مساحة Δ أ ب حـ

$= \frac{١}{٢} \times ٨٠ \times ٤٠ = ١٦٠٠$ متر مربع.

١٠

يتقاطع الطريقان عندما د (س) = ر (س)

∴ | س − ٥ | = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

عندما س ≥ ٥ : س − ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ $١\frac{٢}{٣}$ س = ١٠ ∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[

، عندما س < ٥ : ∴ − س + ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ $\frac{١}{٣}$ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈]− ∞ ، ٥[

، ∵ د (٦) = | ٦ − ٥ | = ١

∴ أ (٦ ، ١) نقطة تقاطع المنحنيين.

، د (٠) = | ٠ − ٥ | = ٥

∴ ب (٠ ، ٥) نقطة تقاطع المنحنيين.

∴ أ ب = $\sqrt{(٦ - ٠)^٢ + (١ - ٥)^٢} = ٢\sqrt{١٣}$

، ∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلو مترات

∴ أ ب = ٥ × ٢ $\sqrt{١٣}$ = ١٠ $\sqrt{١٣}$ ≃ ٣٦ كم

١١

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

∴ ١٧٨ ≤ س ≤ ١٩٢ وبإضافة (− ١٨٥)

إلى أطراف المتباينة. ∴ −٧ ≤ س − ١٨٥ ≤ ٧

∴ | س − ١٨٥ | ≤ ٧

١٢

① بعد ثانيتين : ف = ٨ | ٥ − ٢ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

، بعد ٨ ثوان : ف = ٨ | ٥ − ٨ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

② ∵ ٨ | ن − ٥ | = ١٦

∴ | ن − ٥ | = ٢

∴ ن − ٥ = −٢ ومنها ن = ٣

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

أ، ن − ٥ = ٢ ومنها ن = ٧

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

③ ∵ ٨ | ن − ٥ | < ٨ ∴ | ن − ٥ | < ١

∴ −١ < ن − ٥ < ١ ∴ ٤ < ن < ٦

∴ ن ∈]٤ ، ٦[

١٣

∵ ب = (٨ ، ٤)

، ∵ د (٨) = $\frac{٤}{٣}$ | ٨ − ٥ | = ٤

∴ ب تقع على منحنى الدالة د

∴ الكرة السوداء سوف تسقط فى الجيب ب

إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 7

١

① (ب)	② (ب)	③ (ب)	④ (جـ)
⑤ (أ)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (ب)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (ب)	

٢

① $\frac{(٢٧)^{-٢} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}} = \frac{(٣^{٣})^{-٢} \times (٣)^{٢} \times (٢^{٢})^{٢}}{٢^{٤} \times (٣^{٤})^{-٢}}$

$= \frac{٣^{-٦} \times ٣^{٢} \times ٢^{٤}}{٢^{٤} \times ٣^{-٨}} = ٣^{-٦+٢+٨} = ٣^{٤}$

② $\frac{٤^{٢ن+١} \times ٢^{١-ن}}{٨^{ن+٢}} = \frac{(٢^{٢})^{٢ن+١} \times ٢^{١-ن}}{(٢^{٣})^{ن+٢}}$

$= \frac{٢^{٤ن+٢} \times ٢^{١-ن}}{٢^{٣ن+٦}}$

$= ٢^{٤ن+٢+١-ن-٣ن-٦}$

$= ٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$

③ $\frac{٩^{ن+١} \times ٤^{٢-٢ن}}{٣^{٣ن+١} \times ٤٨^{١-ن}}$

$= \frac{(٣^{٢})^{ن+١} \times (٢^{٢})^{٢-٢ن}}{٣^{٣ن+١} \times ٣^{١-ن} \times (٢^{٤})^{١-ن}}$

$= \frac{٣^{٢ن+٢} \times ٢^{٤-٤ن}}{٣^{٣ن+١} \times ٣^{١-ن} \times ٢^{٤-٤ن}}$

$= ٣^{٢ن+٢-٣ن-١-١+ن} \times ٢^{٤-٤ن-٤+٤ن}$

$= ٣^{٠} \times ٢^{٠} = ١ \times ١ = ١$

④ $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{ن-٣} \times (٢٥)^{م+ن}}{(٧٥)^{ن} \times (٥)^{ن+٢م}}$

$= \frac{٥^{٣} \times ٥^{ن-٣} \times ٣^{ن-٣} \times (٥^{٢})^{م+ن}}{٣^{ن} \times (٥^{٢})^{ن} \times ٥^{ن+٢م}}$

$= \frac{٥^{٣} \times ٥^{ن-٣} \times ٣^{ن-٣} \times ٥^{٢م+٢ن}}{٣^{ن} \times ٥^{٢ن} \times ٥^{ن+٢م}}$

$= ٥^{٣+ن-٣+٢م+٢ن-٢ن-ن-٢م} \times ٣^{ن-٣-ن}$

$= ٥^{٠} \times ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

⑤ (١٨)$^{\frac{١}{٢}}$ × (١٢)$^{\frac{٣}{٢}}$ × $\frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$

= [illegible]

= [illegible]

= [illegible]

= ٢^{٢} × ٣^{٢} = ٣٦

⑥ المقدار = [illegible]

= [illegible]

= ٣^{٠} × ٧^{٠} = ١ × ١ = ١

٣

① الطرف الأيمن

= [illegible]

= [illegible]

= [illegible]

= ٣$^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$

② الطرف الأيمن = [illegible]

= [illegible]

= ٧$^{-١}$ = $\frac{١}{٧}$

③ الطرف الأيمن

= [illegible]

= [illegible]

= ٥^{٢} × ٢^{٠} × ٣^{٠} = ٢٥ × ١ × ١ = ٢٥

④ الطرف الأيمن

$= \frac{٣ \times ٢^{س+٢} + ٢^{س+٢}}{٢^{س+٢} - ٢ \times ٣ \times ٢^{س}}$

$= \frac{٢^{س+٢}(٣+١)}{٢^{س+١}(٢^{٢}-٣)} = \frac{٢^{س+٢} \times ٢^{٢}}{٢^{س+١} \times ١} = ٢^{٣} = ٨$

٤

① $\because$ س$^{\frac{٧}{٢}} = ٢^{٧}$ $\quad\therefore$ س $= (٢^{٧})^{\frac{٢}{٧}} = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{٤\}$

② س$^{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٢^{٥}} = ٢^{-٥}$ $\quad\therefore$ س $= (٢^{-٥})^{\frac{٢}{٥}}$

$\therefore$ س $= ٢^{-٢}$ $\quad\therefore$ م.ح $= \{\frac{١}{٤}\}$

③ $\because$ س$^{-\frac{٥}{٢}} = ٢^{\frac{٥}{٢}}$ $\quad\therefore$ س $= (٢^{\frac{٥}{٢}})^{-\frac{٢}{٥}}$

$\therefore$ س $= ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$ $\quad\therefore$ م.ح $= \{\frac{١}{٢}\}$

④ س$^{\frac{٤}{٣}} = ٣^{٤}$

$\therefore$ س $= \pm (٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}} = \pm ٣^{٣} = \pm ٢٧$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٢٧ ، -٢٧\}$

⑤ (س − ١)$^{\frac{٥}{٣}} = ٢^{٥}$

$\therefore$ س − ١ $= (٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٣} = ٨$

$\therefore$ س $= ٩$ $\quad\therefore$ م.ح $= \{٩\}$

⑥ ٢ س + ٣ $= \pm (٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$ $\quad\therefore$ ٢ س + ٣ $= \pm ٢٧$

$\therefore$ ٢ س $= ٢٤$ أ، ٢ س $= -٣٠$

$\therefore$ س $= ١٢$ أ، س $= -١٥$

$\therefore$ م.ح $= \{١٢ ، -١٥\}$

⑦ س + ١ $= (٣٢^{-\frac{١}{٢}})^{-\frac{٢}{٥}} = ٣٢^{\frac{١}{٥}} = (٢^{٥})^{\frac{١}{٥}}$

$\therefore$ س + ١ $= ٢$ $\quad\therefore$ س $= ١$

$\therefore$ م.ح $= \{١\}$

⑧ س^{٢} − ٥ س + ٩ $= (٣^{٥})^{\frac{٢}{٥}}$

$\therefore$ س^{٢} − ٥ س + ٩ $= ٩$

$\therefore$ س^{٢} − ٥ س $= ٠$ $\quad\therefore$ س (س − ٥) $= ٠$

$\therefore$ س $= ٠$ أ، س $= ٥$ $\quad\therefore$ م.ح $= \{٠ ، ٥\}$

⑨ $\because \sqrt{س} + ٢ = ٩$ $\quad\therefore \sqrt{س} = ٧$

$\therefore$ س $= ٤٩$ $\quad\therefore$ م.ح $= \{٤٩\}$

⑩ (س$^{\frac{٢}{٥}}$ − ١) (س$^{\frac{٢}{٥}}$ − ٤) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{٢}{٥}} = ١$ ومنها س $= \pm ١$

أ، س$^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ ومنها س $= \pm (٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٣٢$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، -١ ، ٣٢ ، -٣٢\}$

⑪ (س$^{\frac{٢}{٣}}$ − ١) (س$^{\frac{٢}{٣}}$ − ٩) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{٢}{٣}} = ١$ $\quad\therefore$ س $= \pm ١$

أ، س$^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ $\quad\therefore$ س $= \pm (٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢٧$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، -١ ، ٢٧ ، -٢٧\}$

⑫ (س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١) (س$^{\frac{١}{٢}}$ − ٢) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{١}{٢}} = ١$ $\quad\therefore$ س $= ١$

أ، س$^{\frac{١}{٢}} = ٢$ $\quad\therefore$ س $= (٢)^{٢} = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، ٤\}$

⑬ س − ٨ $\sqrt{س}$ + ١٥ $= ٠$

$\therefore (\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} - ٥) = ٠$

$\therefore \sqrt{س} = ٣$ ومنها س $= ٩$

أ، $\sqrt{س} = ٥$ ومنها س $= ٢٥$

$\therefore$ م.ح $= \{٩ ، ٢٥\}$

⑭ $\because$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ − ٢٥ س$^{\frac{١}{٣}}$ − ٥٤ $= ٠$

$\therefore$ (س$^{\frac{١}{٣}}$ − ٢٧) (س$^{\frac{١}{٣}}$ + ٢) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{١}{٣}} = ٢٧$

$\therefore$ س $= (٣^{٣})^{٣} = ٣^{٩} = ١٩٦٨٣$

أ، س$^{\frac{١}{٣}} = -٢$ $\quad\therefore$ س $= (-٢)^{٣} = -٨$

$\therefore$ م.ح $= \{١٩٦٨٣ ، -٨\}$

⑮ س$^{\frac{٥}{٩}}$ − س$^{\frac{٥}{٩}}$ − ٦ $= ٠$

$\therefore$ (س$^{\frac{٥}{٩}}$ − ٣) (س$^{\frac{٥}{٩}}$ + ٢) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{٥}{٩}} = ٣$ $\quad\therefore$ س $= ٣^{\frac{٩}{٥}} = ٣،٧$

أ، س$^{\frac{٥}{٩}} = -٢$ (مرفوض)

$\therefore$ م.ح $= \{٣،٧\}$

⑯ س$^{\frac{٤}{٥}}$ − ٣ س$^{\frac{٢}{٥}}$ − ٤ $= ٠$

$\therefore$ (س$^{\frac{٢}{٥}}$ + ١) (س$^{\frac{٢}{٥}}$ − ٤) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{٢}{٥}} = -١$ (مرفوض)

أ، س$^{\frac{٢}{٥}} = ٤$

$\therefore$ س $= \pm (٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٢^{٥} = \pm ٣٢$

$\therefore$ م.ح $= \{-٣٢ ، ٣٢\}$

⑰ بالضرب × $\sqrt[٥]{س}$

$\therefore (\sqrt[٥]{س})^{٢} - ٣ \sqrt[٥]{س} + ٢ = ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{٢}{٥}}$ − ٣ س$^{\frac{١}{٥}}$ + ٢ $= ٠$

$\therefore$ (س$^{\frac{١}{٥}}$ − ١) (س$^{\frac{١}{٥}}$ − ٢) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{١}{٥}} = ١$ ومنها س $= ١$

أ، س$^{\frac{١}{٥}} = ٢$ ومنها س $= ٣٢$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{١ ، ٣٢\}$

٥

① $٥^{٢س-١} = \frac{١}{١٢٥}$ $\quad\therefore ٥^{٢س-١} = \frac{١}{٥^{٣}}$

$\therefore ٥^{٢س-١} = ٥^{-٣}$ $\quad\therefore$ ٢ س − ١ $= -٣$

$\therefore$ ٢ س $= -٢$ $\quad\therefore$ س $= -١$

$\therefore$ م.ح $= \{-١\}$

② $٥^{س+٢} = $ س$^{س+٢}$ $\quad\therefore$ إما س $= ٥$

أ، س + ٢ $= ٠$ $\quad\therefore$ س $= -٢$

$\therefore$ م.ح $= \{-٢ ، ٥\}$

③ $٢^{س^{٢}-٩} = ١$ $\quad\therefore$ س^{٢} − ٩ $= ٠$

$\therefore$ س$^{٢} = ٩$ $\quad\therefore$ س $= \pm ٣$

$\therefore$ م.ح $= \{٣ ، -٣\}$

④ س$^{س^{٢}-٢٥} = ٣^{س^{٢}-٢٥}$

$\therefore$ إما س $= \pm ٣$ $\quad$ أ، س^{٢} − ٢٥ $= ٠$

$\therefore$ س$^{٢} = ٢٥$ $\quad\therefore$ س $= \pm ٥$

$\therefore$ م.ح $= \{٣ ، -٣ ، ٥ ، -٥\}$

⑤ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$

$\therefore (٣\sqrt{٣})^{|س|} = (٣\sqrt{٣})^{٢}$

$\therefore |س| = ٢$ $\quad\therefore$ س $= \pm ٢$

$\therefore$ م.ح $= \{٢ ، -٢\}$

⑥ $\because ٣^{|٣س-٤|} = ٣^{٤س-٤}$

$\therefore |٣س - ٤| = ٤$ س − ٤

عند س $\geq \frac{٤}{٣}$

$\therefore$ ٣ س − ٤ $= ٤$ س − ٤

$\therefore$ س $= ٠$ (لا يحقق) ، عند س $< \frac{٤}{٣}$

$\therefore$ −٣ س + ٤ $= ٤$ س − ٤

$\therefore$ ٧ س $= ٨$ $\quad\therefore$ س $= \frac{٨}{٧}$ (يحقق)

$\therefore$ م.ح $= \{\frac{٨}{٧}\}$

⑦ $٢ \times ٤^{س+٢} = \frac{١}{٣٢}$ $\quad\therefore ٤^{س+٢} = \frac{١}{٦٤}$

$\therefore ٤^{س+٢} = ٤^{-٣}$ $\quad\therefore$ س + ٢ $= -٣$

$\therefore$ س $= -٦$ $\quad\therefore$ م.ح $= \{-٦\}$

⑧ $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

$\therefore (\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = (\frac{٣}{٥})^{٣}$

$\therefore$ ٢ س − ١ $= ٣$ $\quad\therefore$ ٢ س $= ٤$

$\therefore$ س $= ٢$ $\quad\therefore$ م.ح $= \{٢\}$

∴ م.ح = $\{٢\}$

⑨ $٥^{س-١} \times ٧^{-(س-١)} = \frac{٢٥}{٤٩}$

∴ $٥^{س-١} \times ٧^{-(س-١)} = \left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢}$

∴ $\left(\frac{٥}{٧}\right)^{س-١} = \left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢}$

∴ $س - ١ = ٢$ ∴ $س = ٣$

∴ م.ح = $\{٣\}$

⑩ ∵ $\frac{٩^{س+١} \times ٤^{س-١}}{٣٦^{س}} = \frac{٣^{٢س+٢} \times ٢^{٢س-٢}}{٣^{٢س} \times ٢^{٢س}}$

$= ٣^{٢س+٢-٢س} \times ٢^{٢س-٢-٢س}$

$= ٣^{٢} \times ٢^{-٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$

∴ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{س} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ ∴ $س = ٢$

∴ م.ح = $\{٢\}$

⑪ $\frac{١٢^{٢س-٢} \times ٩^{س+١}}{١٨^{٢س} \times ٢٤^{س-٢}} = ٩$

∴ $\frac{(٣ \times ٢^{٢})^{٢س-٢} \times (٣^{٢})^{س+١}}{(٢ \times ٣^{٢})^{٢س} \times (٢^{٣})^{س-٢}} = ٩$

∴ $\frac{٣^{٢س-٢} \times ٢^{٤س-٤} \times ٣^{٢س+٢}}{٢^{٢س} \times ٣^{٤س} \times ٢^{٤س-٤}} = ٩$

∴ $٣^{٢س-٢+٢س+٢-٤س}$ $\times ٢^{٤س-٤-٢س-٤س+٤} = ٩$

∴ $٣^{س} \times ٢^{٠} = ٣^{٢}$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ $س = ٢$ ∴ م.ح = $\{٢\}$

⑫ $\frac{١}{٢٧}\left(\sqrt{٣}\right)^{س+٢} = ١$

∴ $\frac{١}{\left(\sqrt{٣}\right)^{٦}} \times \left(\sqrt{٣}\right)^{س+٢} = ١$

∴ $\left(\sqrt{٣}\right)^{س+٢} = \left(\sqrt{٣}\right)^{٦}$

∴ $س + ٢ = ٦$ ∴ $س = ٤$

∴ م.ح = $\{٤\}$

⑬ $\left(\sqrt{٣}\right)^{س^{٢}-٥س} = ١$ ∴ $س^{٢} - ٥س = ٠$

∴ $س(س - ٥) = ٠$ ∴ $س = ٠$ أ، $س = ٥$

∴ م.ح = $\{٠ ، ٥\}$

⑭ ∵ $٥^{س^{٢}-٥س} = \frac{١٦}{١٠٠٠٠} = \frac{١}{٦٢٥}$

∴ $٥^{س^{٢}-٥س} = ٥^{-٤}$ ∴ $س^{٢} - ٥س = -٤$

∴ $س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠$

∴ $(س - ١)(س - ٤) = ٠$

∴ $س = ١$ أ، $س = ٤$ ∴ م.ح = $\{١ ، ٤\}$

⑮ $٥^{س^{٢}} = ٢٥^{س+٤}$ ∴ $٥^{س^{٢}} = ٥^{٢س+٨}$

∴ $س^{٢} = ٢س + ٨$ ∴ $س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

∴ $(س + ٢)(س - ٤) = ٠$

∴ $س = -٢$ أ، $س = ٤$ ∴ م.ح = $\{-٢ ، ٤\}$

⑯ $٢^{س^{٢}-٤٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ ∴ $٢^{س^{٢}-٤٢} = ٢^{-س}$

∴ $س^{٢} - ٤٢ = -س$

∴ $س^{٢} + س - ٤٢ = ٠$

∴ $(س - ٦)(س + ٧) = ٠$

∴ $س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٦$

أ، $س + ٧ = ٠$ ومنها $س = -٧$

∴ م.ح = $\{٦ ، -٧\}$

⑰ $\left(\sqrt{٧}\right)^{|س+٢|} = ٤٩$

∴ $\left(\sqrt{٧}\right)^{|س+٢|} = \left(\sqrt{٧}\right)^{٤}$

∴ $|س + ٢| = ٤$ ∴ $س + ٢ = \pm ٤$

∴ إما $س + ٢ = ٤$ ومنها $س = ٢$

أ، $س + ٢ = -٤$ ومنها $س = -٦$

∴ م.ح = $\{٢ ، -٦\}$

⑱ $٣^{٢س-٣} \times ٧^{٦-٤س} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} \times ٧^{-٢(٢س-٣)} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} \times \frac{١}{(٧^{٢})^{٢س-٣}} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} = (٤٩)^{٢س-٣}$

∴ $٢س - ٣ = ٠$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

∴ م.ح = $\{\frac{٣}{٢}\}$

⑲ $\sqrt{٩^{س} - ٢ \times ٣^{س+١} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{٣^{٢س} - ٢ \times ٣ \times ٣^{س} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{(٣^{س} - ٣)^{٢}} = ٢٤$ ∴ $|٣^{س} - ٣| = ٢٤$

∴ $٣^{س} = ٢٧$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٣}$

∴ $س = ٣$ أ، $٣^{س} - ٣ = -٢٤$

∴ $٣^{س} = -٢١$ (مرفوض)

∴ م.ح = $\{٣\}$

⑳ $\sqrt{٥^{٢س-٢} - \frac{٢}{٥} \times ٥^{س} + ١} = ١٢٤$

∴ $\sqrt{٥^{٢(س-١)} - ٢ \times ٥^{س-١} + ١} = ١٢٤$

∴ $\sqrt{(٥^{س-١} - ١)^{٢}} = ١٢٤$

∴ $|٥^{س-١} - ١| = ١٢٤$

∴ $٥^{س-١} - ١ = ١٢٤$

∴ $٥^{س-١} = ١٢٥ = ٥^{٣}$

∴ $س - ١ = ٣$ ∴ $س = ٤$

أ، $٥^{س-١} = -١٢٤$

∴ $٥^{س-١} = -١٢٣$ (مرفوض)

∴ م.ح = $\{٤\}$

٩

① $٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$

∴ $٥^{س}(٥ + ٥^{-١}) = ٢٦$

∴ $٥^{س} \times \frac{٢٦}{٥} = ٢٦$

∴ $٥^{س} = ٥$ ∴ $س = ١$

∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

② $٣^{س+٣} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$

∴ $٣^{س}(٣^{٣} - ٣^{٢}) = ١٦٢$

∴ $٣^{س} \times ١٨ = ١٦٢$

∴ $٣^{س} = ٩$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ $س = ٢$ ∴ م.ح = $\{٢\}$

③ $٧^{س+٢} + ٧^{س} = ٥٠$

∴ $٧^{س}(٧^{٢} + ١) = ٥٠$

∴ $٧^{س} \times ٥٠ = ٥٠$ ∴ $٧^{س} = ١$

∴ $س = ٠$ ∴ م.ح = $\{٠\}$

④ $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$

∴ $٥^{٢س} - ٢٦ \times ٥^{س} + ٢٥ = ٠$

∴ $(٥^{س} - ٢٥)(٥^{س} - ١) = ٠$

∴ $٥^{س} = ٢٥$ ومنها $س = ٢$

، $٥^{س} = ١$ ومنها $س = ٠$

∴ م.ح = $\{٢ ، ٠\}$

⑤ $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$

∴ $٢^{س} + \frac{٣٢}{٢^{س}} = ١٢$ بالضرب × $٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} + ٣٢ = ١٢ \times ٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$

∴ $(٢^{س} - ٤)(٢^{س} - ٨) = ٠$

∴ $٢^{س} = ٤$ ومنها $س = ٢$

أ، $٢^{س} = ٨$ ومنها $س = ٣$

∴ م.ح = $\{٢ ، ٣\}$

⑥ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س+١} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٢} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٤} = ٨٨$

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}\left(\frac{١}{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}\right) = ٨٨$

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} \times \frac{١١}{١٦} = ٨٨$ ∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = ٨٨ \times \frac{١٦}{١١}$

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = ١٢٨$ ∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٧}$

∴ $س = -٧$ ∴ م.ح = $\{-٧\}$

⑦ $٤^{س} + ٢^{س+١} = ٨$

∴ $٢^{٢س} + ٢(٢)^{س} - ٨ = ٠$

∴ $(٢^{س} + ٤)(٢^{س} - ٢) = ٠$

∴ إما $٢^{س} = -٤$ (مرفوض) أ، $٢^{س} = ٢$

∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

(٨) $٢^{٢س+١} - ٣٣ (٢)^{س} + ١٦ = ٠$

∴ $٢ (٢)^{٢س} - ٣٣ (٢)^{س} + ١٦ = ٠$

∴ $[٢ (٢)^{س} - ١] [٢^{س} - ١٦] = ٠$

∴ إما $٢ (٢)^{س} = ١$ ∴ $٢^{س+١} = ١$

∴ $س + ١ = ٠$ ∴ $س = -١$

أ، $٢^{س} = ١٦$ ∴ $٢^{س} = ٢^{٤}$ ∴ $س = ٤$

∴ مجموعة الحل = $\{-١ ، ٤\}$

(٩) $٥^{٢س-٢} - ٦ (٥)^{س-١} + ٥ = ٠$

∴ $٥^{٢(س-١)} - ٦ (٥)^{س-١} + ٥ = ٠$

∴ $(٥^{س-١} - ١) (٥^{س-١} - ٥) = ٠$

∴ إما $٥^{س-١} = ١$ ومنها $س - ١ = ٠$

∴ $س = ١$ أ، $٥^{س-١} = ٥$

∴ $س - ١ = ١$ ∴ $س = ٢$

∴ مجموعة الحل = $\{١ ، ٢\}$

(١٠) $٩^{س^٢ - ١} - ٣٦ (٣)^{س^٢ - ٢} + ٣ = ٠$

∴ $(٣)^{٢(س^٢-١)} - \frac{٣٦}{٩} (٣)^{س^٢ - ١} + ٣ = ٠$

∴ $(٣)^{٢(س^٢-١)} - ٤ (٣)^{س^٢ - ١} + ٣ = ٠$

∴ $(٣^{س^٢ - ١} - ١) (٣^{س^٢ - ١} - ٣) = ٠$

∴ إما $٣^{س^٢ - ١} = ١$

∴ $س^٢ - ١ = ٠$ ∴ $س^٢ = ١$

∴ $س = ±١$ أ، $٣^{س^٢ - ١} = ٣$

∴ $س^٢ - ١ = ١$ ∴ $س^٢ = ٢$

∴ $س = ±\sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\{١ ، -١ ، \sqrt{٢} ، -\sqrt{٢}\}$

(١١) $١٠^{س} - ٥^{س-١} \times ٢^{س-٢} = ٩٥٠$

∴ $١٠^{س} - \frac{٥^{س}}{٥} \times \frac{٢^{س}}{٤} = ٩٥٠$

∴ $١٠^{س} - \frac{١}{٢٠} (١٠)^{س} = ٩٥٠$

وبالضرب × ٢٠

∴ $٢٠ (١٠)^{س} - (١٠)^{س} = ٢٠ \times ٩٥٠$

∴ $١٩ (١٠)^{س} = ٢٠ \times ٩٥٠$

∴ $١٠^{س} = ١٠٠٠$ ∴ $١٠^{س} = ١٠^{٣}$

∴ $س = ٣$

∴ مجموعة الحل = $\{٣\}$

٧

(١) (أ)	(٢) (ب)	(٣) (ب)
(٤) (جـ)	(٥) (د)	(٦) (أ)
(٧) (جـ)	(٨) (د)	(٩) (أ)

٨

(١) $ص^{\frac{٢}{٣}} = ٦٢$ ∴ $ص = (٦٢)^{\frac{٣}{٢}} = ٨^{٢} = ٢٥٦$

، $٢ س^{\frac{٥}{٣}} = ٢ \times ٥٢$

∴ $س = (٥٢)^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٣} = ٨$

∴ $٥ س + ٢ ص = ٥ \times ٨ + ٢ \times ٢٥٦$

$= ٤٠ + ٥١٢ = ٥٥٢$

(٢) $س^{\frac{٣}{٢}} = ٢٧$ ∴ $س = (٣^٣)^{\frac{٢}{٣}} = ٣^٢ = ٩$

، $٣ ص^{\frac{٢}{٣}} = ٢٧$ ∴ $ص^{\frac{٢}{٣}} = ٩$

∴ $ص = ±(٣)^{\frac{٣}{٢}} = ±٢٧$

∴ $س + ص = ٩ + ٢٧ = ٣٦$

أ، $س + ص = ٩ - ٢٧ = -١٨$

(٣) ∵ $س^{\frac{٤}{٣}} = ٤^{٣}$

∴ $س = ±(٤^٣)^{\frac{٣}{٤}} = ±٢٧$

، ∵ $٩ ص^{\frac{٢}{٣}} = ٨١$ ∴ $ص^{\frac{٢}{٣}} = ٩ = ٣^٢$

∴ $ص^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{-٢}$

∴ $ص = ±(٣^{-٢})^{\frac{٣}{٢}} = ±(٣)^{-٣} = ±\frac{١}{٢٧}$

∴ $|٢ س ص| = |٢ \times (±٢٧) \times (±\frac{١}{٢٧})| = ٢$

٩

(١) خطأ لأن $(-٩)^{\frac{٢}{٤}} ≠ \sqrt[٤]{(-٩)^٢}$ لوجود عامل مشترك بين البسط والمقام للأس.

(٢) خطأ لأن $س = ± ٢$ لأن الأس زوجي.

١٠

(١) ∵ $٢^{س} + ٢^{ص} = ٢^{٧}$

∴ $٢ س + ٢ ص = ٧$ (١)

، ∵ $٥^{٢س} \div ٥^{٢ص} = ٥^{٢}$

∴ $س - ٢ ص = ٣$ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ $٣ س = ١٠$ ∴ $س = \frac{١٠}{٣}$

، بالتعويض في (١) : ∴ $ص = \frac{١}{٦}$

∴ مجموعة الحل = $\{(\frac{١٠}{٣} ، \frac{١}{٦})\}$

(٢) $٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ (١) ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) :

∴ $(\frac{٣}{٥})^{س} \times (\frac{٥}{٣})^{ص} = \frac{٧٥}{٤٥}$

∴ $(\frac{٥}{٣})^{-س} \times (\frac{٥}{٣})^{ص} = \frac{٥}{٣}$

∴ $(\frac{٥}{٣})^{ص-س} = \frac{٥}{٣}$ ∴ $ص - س = ١$ (٣)

وبضرب (١) × (٢) :

∴ $(١٥)^{س} \times (١٥)^{ص} = ٧٥ \times ٤٥$

∴ $(١٥)^{س+ص} = ١٥^{٢}$ ∴ $س + ص = ٢$ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) نجد أن : $٢ ص = ٤$

∴ $ص = ٢$ وبالتعويض في (٣) : ∴ $س = ١$

∴ مجموعة الحل = $\{(١ ، ٢)\}$

(٣) [illegible]

∴ $س + ص = ٣$ ∴ $ص = ٣ - س$

[illegible]

∴ إما $٣^{س} = ٣$ ∴ $س = ١$ ومنها $ص = ٢$

أ، $٣^{س} = ٩$ ∴ $٣^{س} = ٣^٢$

∴ $س = ٢$ ومنها $ص = ١$

∴ مجموعة الحل = $\{(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)\}$

١١

∵ $٩^{س+١} - (٣^{س+٢} + ٣^{س}) + ٢ = ٠$

∴ $٩ \times ٩^{س} - ٣^{س} (٣^{٢} + ١) + ٢ = ٠$

∴ $٩ \times ٣^{٢س} - ١٠ \times ٣^{س} + ٢ = ٠$ [illegible]

∴ $(٩ \times ٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٢) = ٠$ [illegible]

∴ $٩ \times ٣^{س} - ١ = ٠$ ومنها $٣^{س} = \frac{١}{٩}$

∴ $٣^{س} = ٣^{-٢}$ ∴ $س = -٢$

أو $٣^{س} - ٣ = ٠$ ومنها $٣^{س} = ٣$ ∴ $س = ١$

∴ مجموعة الحل = $\{-٢ ، ١\}$

١٢

[illegible]

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

١٣

① (ب) ② (د) ③ (جـ)

④ (جـ) ⑤ (جـ) ⑥ (جـ)

⑦ (د) ⑧ (د) ⑨ (د)

إرشادات لحل رقم ١٣

① ∵ $\sqrt{س^2}$ = |س| = − س لأن (س < ٠)

، $\sqrt[3]{س^3}$ = س

، $\sqrt{س^2 - 2س + 1} = \sqrt{(س - 1)^2}$

= |س − ١| = ١ − س (لأن س < ٠)

∴ $\sqrt{س^2} - \sqrt[3]{س^3} - \sqrt{س^2 - 2س + 1}$ + ١

= − س − س − (١ − س) + ١ = − س

② ∵ أ = $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}$ ∴ $أ^4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

∴ $(أ^4)^6 = \frac{4}{243}$ عدد نسبى.

∴ $أ^{24}$ عدد نسبى.

③ (جـ) لا تكون دائما صحيحة لأن

$\sqrt{س^2 ص^6}$ = |س $ص^3$|

④ ∵ $س^{\frac{2}{3}} = س^{\frac{2}{5}}$ ∴ $س^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{2}{5}}$ = ٠

∴ $س^{\frac{2}{5}}$ (١ − $س^{\frac{4}{15}}$) = ٠

∴ $س^{\frac{2}{5}}$ = ٠

ومنها س = ٠ أو ١ − $س^{\frac{4}{15}}$ = ٠

ومنها $س^{\frac{4}{15}}$ = ١ ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١}

⑤ $\sqrt[5]{\frac{2}{27}} = \sqrt[5]{\frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 27}} = \sqrt[5]{\frac{18}{243}} = \frac{\sqrt[5]{18}}{3}$

⑥ $\sqrt[ن]{6^ن} = (\sqrt[ن]{6})^ن$ صحيحة لكل $\sqrt[ن]{6}$ ∈ ح

، ن ∈ $ص^+$ − {١}

⑦ ∵ $س^{\frac{2}{3}}$ = أ

∴ س = $أ^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{أ})^3$

∴ لابد وأن تكون أ ≥ ٠

أى أن أ ∈ $ح^+$ ∪ {٠}

⑧ ∵ $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt[6]{م\sqrt{2}}$ برفع الطرفين لأس (٦)

∴ $(2\sqrt{2\sqrt{2}})^2 = م\sqrt{2}$

∴ ٤ × $2\sqrt{2}$ = م$\sqrt{2}$ ∴ م = ١٢

⑨ $\sqrt[م]{أ} \times \sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{1}{م}} \times أ^{\frac{1}{ن}} = أ^{\frac{1}{م} + \frac{1}{ن}}$

= $أ^{\frac{م + ن}{م ن}}$

= $\sqrt[م ن]{أ^{م + ن}}$

١٤

① $\frac{5^{س - 1} \times س^{2 - س}}{5}$ = ١

∴ $5^{س - 2} \times س^{2 - س}$ = ١

∴ $5^{س - 2} = س^{س - 2}$

∴ س = ٥ أو س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٢}

② ∵ $(س - 3)^{س - 5}$ = ١

∴ إما س − ٥ = ٠ ومنها س = ٥

أو س − ٣ = ١ ومنها س = ٤

أو س − ٣ = −١ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س = ٢ (مرفوض) لأن الأس (٢ − ٥) فردى.

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٤}

③ ∵ $(س - 3)^{(س - 6)}$ = ١

∴ إما س − ٦ = ٠ ومنها س = ٦

أو س − ٣ = ١ ومنها س = ٤

أو س − ٣ = −١ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س = ٢ (يتحقق) (لأن الأس (٢ − ٦) زوجى)

∴ مجموعة الحل = {٦ ، ٤ ، ٢}

إجابات تمارين 8

١

① ليست أسية

② دالة أسية ، أساسها = ٥ ، أسها = س

③ ليست أسية ④ ليست أسية

⑤ دالة أسية ، أساسها = $\frac{2}{3}$ ، أسها = س − ١

⑥ ليست أسية

٢

① (د) ② (أ) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

٣

$\frac{د(س + 4) - د(س + 3)}{د(س + 5) - د(س + 4)} = \frac{5^{س + 4} - 5^{س + 3}}{5^{س + 5} - 5^{س + 4}}$

= $\frac{5^{س + 3}(5 - 1)}{5^{س + 4}(5 - 1)} = \frac{1}{5}$

٤

∵ د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

∴ $7^{(2س - 1) + 1} + 7^{(س - 2) + 1}$ = ٥٠

∴ $7^{2س} + 7^{س - 1}$ = ٥٠

∴ $7^{2س} + 7^{-1} \times 7^{س}$ = ٥٠

∴ $7^{2س} + \frac{1}{7} \times 7^{س}$ = ٥٠ (بالضرب × ٧)

∴ ٧ × $7^{2س} + 7^{س}$ − ٣٥٠ = ٠

∴ (٧ × $7^{س}$ + ٥٠) ($7^{س}$ − ٧) = ٠

∴ ٧ × $7^{س}$ + ٥٠ = ٠ ومنها $7^{س} = \frac{-50}{7}$ (مرفوض)

أو $7^{س}$ − ٧ = ٠ ∴ $7^{س}$ = ٧ ∴ س = ١

٥

∵ $د_1$ (٢ س − ١) + $د_2$ (س + ١) = ٧٥٦

∴ $3^{2س - 1} + 9^{س + 1}$ = ٧٥٦

∴ $3^{2س - 1} + 3^{2س + 2}$ = ٧٥٦

∴ $3^{2س}(3^{-1} + 3^2)$ = ٧٥٦

∴ $3^{2س} \times \frac{28}{3}$ = ٧٥٦

∴ $3^{2س}$ = ٧٥٦ × $\frac{3}{28}$

∴ $3^{2س}$ = ٨١ ∴ $3^{2س} = 3^4$

∴ ٢ س = ٤ ∴ س = ٢

٦

الطرف الأيمن = $\frac{ص^{س + 1} + ص^{س + 2}}{ص^{س - 1} + ص^{س}}$

= $\frac{ص^{س + 1}(1 + ص)}{ص^{س}(ص + 1)}$ = ص

٧

الطرف الأيمن = $\frac{3^{2س + 2} + 3^{2س - 1}}{4 \times 3^{2س} - 7 \times 3^{2س - 1}}$

= $\frac{3^{2س - 1}(3^3 + 1)}{3^{2س - 1}(4 \times 3 - 7)} = \frac{28}{5}$

٨

الطرف الأيمن = $\frac{3^{2(س + 1) - 1} \times 3^{2(س + 2) - 1}}{3^{4(س + 2) - 1}}$

= $\frac{3^{2س + 1} \times 3^{2س + 3}}{3^{4س + 7}}$

= $3^{2س + 1 + 2س + 3 - 4س - 7}$

= 3^{-3} = د (س)

٩

الطرف الأيمن = $\frac{4^{س + 1}}{4^{س - 1}} + \frac{4^{س - 1}}{4^{س + 1}} = 4^2 + \frac{1}{4^2} = \frac{257}{16}$

١٠

∵ $٢٧^{س - ١} + ٢٧^{س + ١} = \frac{٨٢}{٢٧}$

∴ $٢٧^{س - ١}(١ + ٤٩) = \frac{٨٢}{٢٧}$

∴ $٢٧^{س - ١} = ٣^{-٣}$

∴ ٣ س − ٣ = −٣ ∴ ٣ س = ١

∴ س = $\frac{١}{٣}$

١١

∵ $\frac{٢^{٣س} - ٢^{٣س - ١}}{٢^{س} - ٢^{س - ١}} = ٢^{٢س}$

∴ $\frac{٢^{٣س - ١}(٢ - ١)}{٢^{س - ١}(٢ - ١)} = ٢^{٢س}$

∴ ٢ س = ٢ س − ٢

∴ س − ٢ = ١ ∴ س = ٣

١٢

∵ $\frac{٣^{٢س - ١}}{٣^{١ - س}} = ٧٢٩$

∴ ٣ س − ١ − ١ + س = ٦

∴ س − ٢ = ٦ ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

١٣

∵ $٣^{س + ١} + ٣^{٢ - س} = ٣٠$ وبالضرب × $٣^{س - ١}$

∴ $٣^{٢س} + ٣^{٢} - ١٠ × ٣ × ٣^{س - ١} = ٠$

∴ $٣^{٢س} - ١٠ × ٣^{س} + ٩ = ٠$

∴ $(٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٩) = ٠$

∴ $٣^{س} = ١$ ومنها س = ٠ ، $٣^{س} = ٩$

ومنها س = ٢

١٤

∵ $٣^{س} × ٢^{س} = ٨ × ٢^{س}$ ...

∴ $(٣^{س} - ٢)(٣^{س} - ١) = ٠$

∴ $٣^{س} = ٢$ ومنها س = ١ ، $٣^{س} = ١$ ومنها س = ٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

١٥

∵ $٢^{س} + ٢^{\frac{س}{٢}} = ١٢$ وبوضع $٢^{\frac{س}{٢}}$ = ص

∴ ص² + ص − ١٢ = ٠

∴ (ص + ٤) (ص − ٣) = ٠

∴ ص = −٤ (مرفوض) ، ص = ٣ ومنها $٢^{\frac{س}{٢}} = ٣$

∴ $\frac{س}{٢} = ١$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٢}

١٦

∵ د (س − ٢) = $٣^{س - ٢}$ ، د (س) = $٣^{س}$

∴ د (٣ س + ١) − د (٢ س − ١) = ٢٤

∴ $٣^{٣س + ١} - ٣^{٢س - ١} = ٢٤$

∴ $٣^{٢س - ١} × ٨ = ٢٤$ ∴ $٣^{٢س - ١} = ٣$

∴ ٢ س + ١ = ١

∴ ٢ س = صفر

∴ س = صفر

١٧

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (جـ)	(٤) (أ)
(٥) (أ)	(٦) (ب)	(٧) (ب)	(٨) (جـ)
(٩) (جـ)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	(١٢) (ب)
(١٣) (جـ)	(١٤) (د)	(١٥) (أ)	(١٦) (د)
(١٧) (ب)	(١٨) (ب)		

١٨

(١) شكل (٧)	(٢) شكل (٢)
(٣) شكل (٥)	(٤) شكل (١)
(٥) شكل (٦)	(٦) شكل (٣)
(٧) شكل (٤)	(٨) شكل (٨)

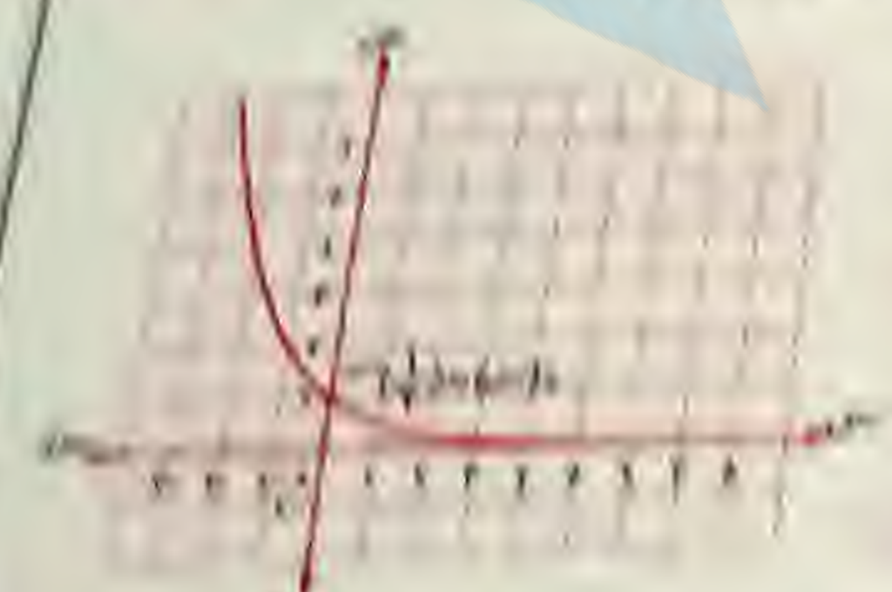
١٩

(١) د (س) = $٢^{س}$



المجال = ح ، المدى = ح⁺ ، الدالة تزايدية على مجالها

(٢) د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$



المجال = ح ، المدى = ح⁺ ، الدالة تناقصية على مجالها

(٣) د (س) = −٣ $(٢)^{س}$



المجال = ح ، المدى = ... ، الدالة تناقصية على مجالها

(٤) د (س) = $٢^{س}$ − ١



المجال = ح ، المدى =]−١ ، ∞[
، الدالة تزايدية على مجالها

(٥) د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س - ١}$ ، ...



المجال = ح ، المدى =]−١ ، ∞[
، الدالة تناقصية على مجالها

(٦) د (س) = ٢ $(\frac{١}{٢})^{س}$ + ١

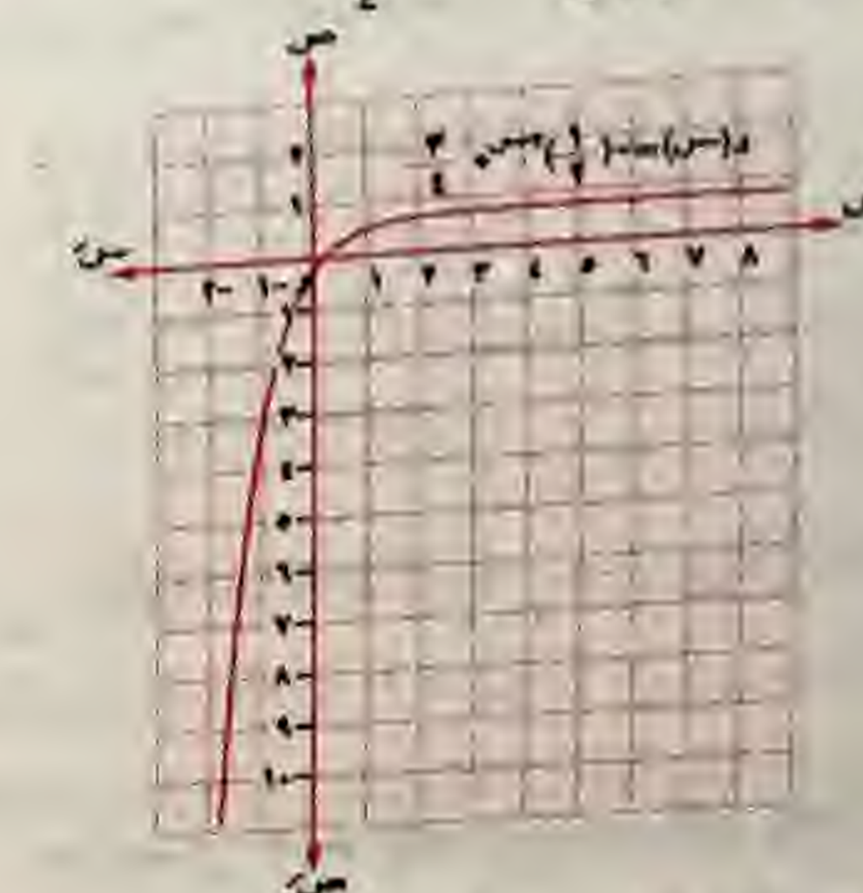


المجال = ح ، المدى =]١ ، ∞[
، الدالة تناقصية على مجالها

المجال = ح ، المدى =]٠ ، ∞[، الدالة تناقصية على مجالها.

، الدالة تناقصية على مجالها

⑦ د (س) = $-\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢-س}+\frac{٣}{٤}$



المجال = ح ، المدى =]−∞ ، $\frac{٣}{٤}$[

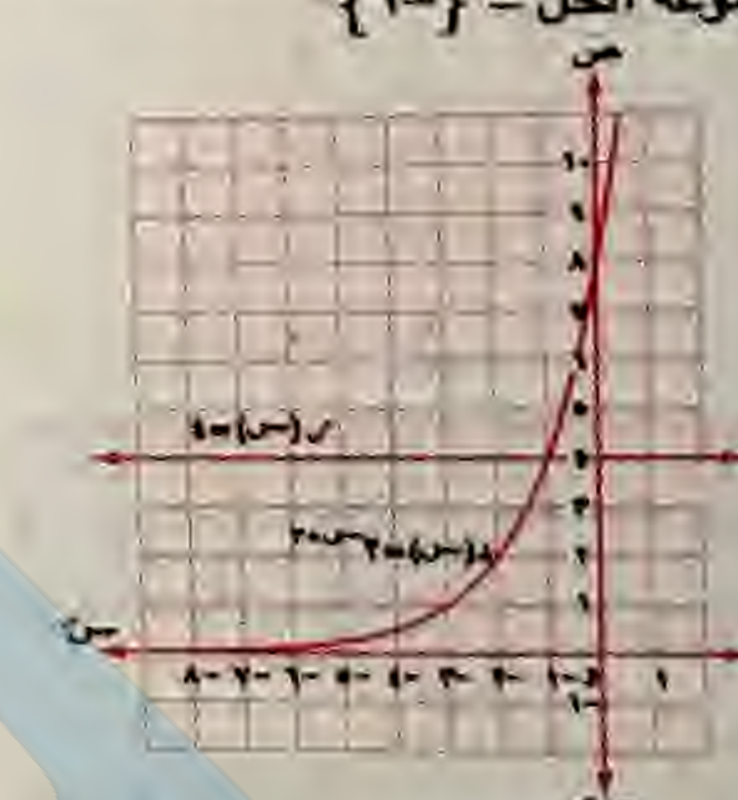
، الدالة تزايدية على مجالها.

٢٠

① من التمثيل البياني للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س+٣}$ ، ر : ر (س) = ٤

∴ مجموعة الحل = {−١}



② من التمثيل البياني للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س}$

، ر : ر (س) = ٨

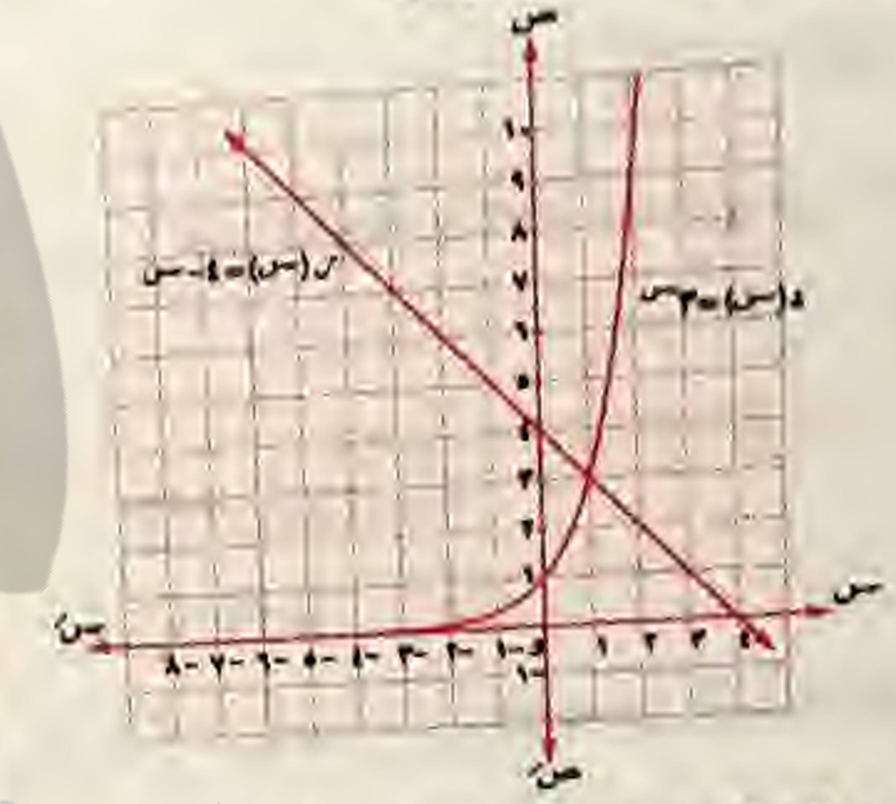
∴ مجموعة الحل = {٣}



③ من التمثيل البياني للدالتين :

د : د (س) = $٣^{س}$ ، ر : ر (س) = ٤ − س

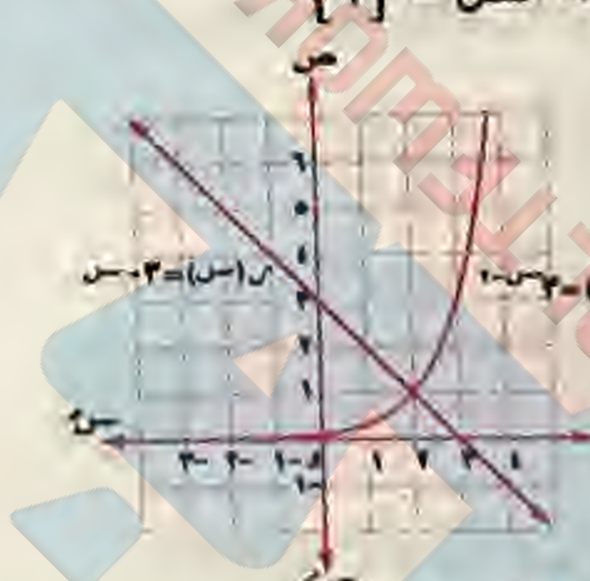
∴ مجموعة الحل = {١}



④ من التمثيل البياني للدالتين :

د : د (س) = $٣^{س-٢}$ ، ر : ر (س) = ٣ − س

∴ مجموعة الحل = {٢}



⑤ من التمثيل البياني للدالتين :

د : د (س) = $٢^{١-س}$ ، ر : ر (س) = س + ٥

∴ مجموعة الحل = {−١}



⑥ من التمثيل البياني للدالتين :

د : د (س) = $٤^{٣س+١}$

، ر : ر (س) = ٤ − س

∴ مجموعة الحل = {٠}

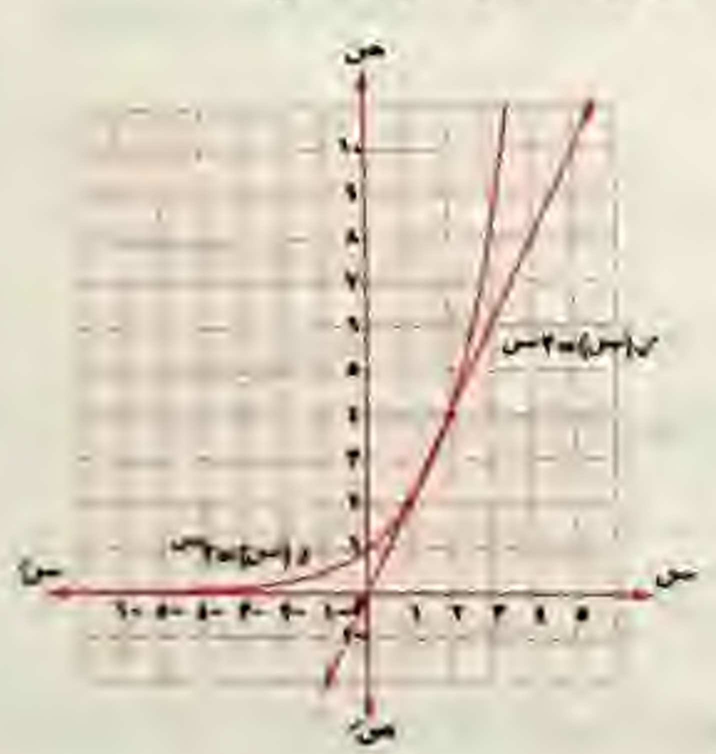


⑦ من التمثيل البياني للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س}$

، ر : ر (س) = ٢ س

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}



⑧ من التمثيل البياني للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س}$

، ر : ر (س) = $٣^{س+١}$

∴ س ≃ $-٢\frac{٣}{٤}$

∴ مجموعة الحل = {$-٢\frac{٣}{٤}$}



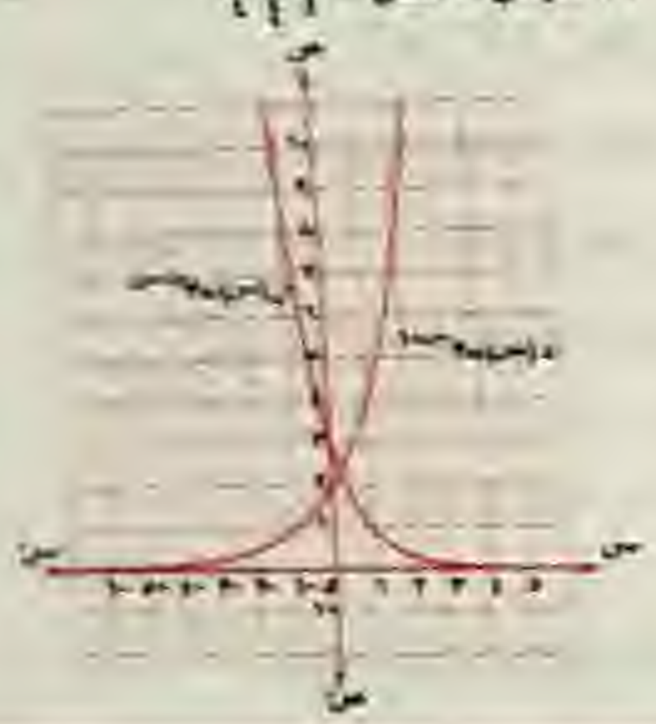
⑨ من التمثيل البياني للدالتين :

د : د (س) = $٦^{٣س+١}$

، ر : ر (س) = $٦^{٢-س}$

∴ س = $\frac{١}{٤}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٤}$}



٢١

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩



ومن الرسم :

① د $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ ≃ ١٫٧

② عندما $٣^{س-١}$ = $٧\frac{١}{٢}$ فإن : س ≃ ٢٫٨

ومن الرسم:

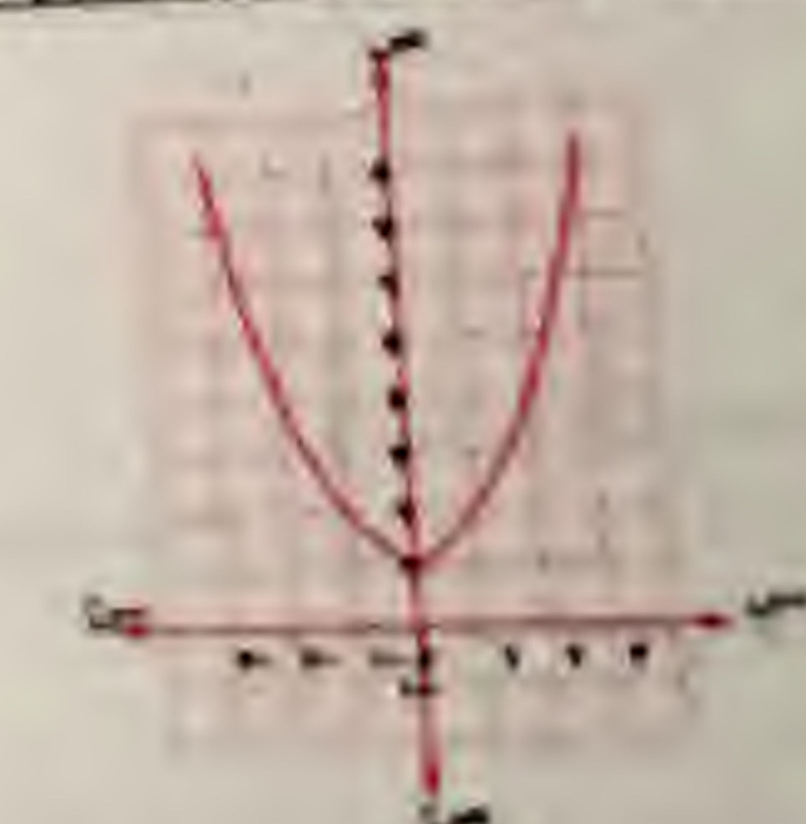


- المجال = ح ، المدى =]−∞ ، ١[
- الدالة تزايدية في]−∞ ، ٠[وتناقصية في]٠ ، ∞[

(٢٣)

د(س) = ٢^س حينما س ≤ ٠ ، د(س) = ٢^{−س} حينما س > ٠

س	٠	١	٢	٣	(٠)	−١	−٢	−٣
د(س)	١	٢	٤	٨	(١)	٢	٤	٨



- المدى = [١ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[وتزايدية في]٠ ، ∞[
- الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

(٢٤)

د(س) = $(\frac{1}{2})^{س}$ حينما س ≥ ٠ ، د(س) = $(\frac{1}{2})^{-س}$ حينما س < ٠

س	٠	١	٢	٣	(٠)	−١	−٢	−٣
د(س)	١	½	¼	⅛	(١)	½	¼	⅛



- المدى =]٠ ، ١]
- الدالة تزايدية في]−∞ ، ٠[وتناقصية في]٠ ، ∞[
- الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

(٢٥)

∵ ٥^{جا س} + ٥^{جا س − ١} = ٢٦

∴ ٥^{جا س} (٥ + ٥^{−١}) = ٢٦

∴ ٥^{جا س} = ٥ ∴ جا س = ١

∴ س = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

(٢٦)

المقدار = $\frac{1}{2^{-س}+1} + \frac{1}{2^{س}+1} \times \frac{2^{-س}}{2^{-س}}$

= $\frac{1}{2^{-س}+1} + \frac{2^{-س}}{1+2^{-س}} = \frac{1+2^{-س}}{2^{-س}+1} = 1$

∴ قيمة المقدار = ١ مهما كانت قيمة س

(٢٧)

∵ دالة الرصيد هي د(ن) = أ (١ + ر)^ن

∴ الرصيد بعد ١٠ سنوات = ٨٠٠٠٠ $(1 + \frac{10,5}{100})^{10}$

= ٨٠٠٠٠ (١,١٠٥)^{١٠}

≈ ٢١٧١٣٦ جنيهًا.

(٢٨)

① عدد السكان بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

= أ (١ + ر)^ن

= ٤٣,٢ $(1 + \frac{1,5}{100})^{ن}$ = ٤٣,٢ (١,٠١٥)^ن

② عام ٢٠٢٠ يكون عدد السنين = ٢٠٢٠ − ٢٠٠٠

= ٢٠ سنة.

∴ عدد السكان = ٤٣,٢ (١,٠١٥)^{٢٠}

≈ ٥٨,٢ مليون نسمة.

(٢٩)

أ = ٣٦٤٠٠ ، ر = $\frac{4}{100}$ = ٠,٠٤ ، ن = عدد المباريات

عدد الحضور (ص) = أ (١ − ر)^ن

= ٣٦٤٠٠ (١ − ٠,٠٤)^ن

= ٣٦٤٠٠ (٠,٩٦)^ن

، في المباراة العاشرة

يكون عدد الحضور (ص) = ٣٦٤٠٠ (٠,٩٦)^{١٠}

≈ ٢٤٢٠٠ مُشجع

(٣٠)

أ = ٨٠ ، ر = $\frac{18}{100}$ = ٠,١٨ ، ن = ٤ سنوات.

∴ عدد الأبقار = أ (١ + ر)^ن

، عدد الأبقار بعد ٤ سنوات = ٨٠ (١ + ٠,١٨)^٤

≈ ١٥٥ بقرة.

(٣١)

أ = ٤,٦ ، ر = $\frac{4}{100}$ = ٠,٠٤

① دالة النمو المستقبلي بعد ن سنة = أ (١ + ر)^ن

= ٤,٦ (١ + ٠,٠٤)^ن

= ٤,٦ (١,٠٤)^ن مليون نسمة.

② بعد خمس سنوات

عدد السكان = ٤,٦ (١,٠٤)^٥ ≈ ٥,٦ مليون نسمة

(٣٢)

أ = ٢٥٤ ، ر = $\frac{5}{100}$ = ٠,٠٥

، الفترة الزمنية ن = ٩ سنوات.

∴ دالة التضاؤل الأسي هي

د(ن) = أ (١ − ر)^ن = ٢٥٤ (١ − ٠,٠٥)^ن

= ٢٥٤ (٠,٩٥)^ن

∴ إنتاج الفحم في السنة التاسعة = ٢٥٤ (٠,٩٥)^٩

≈ ١٦٠ كجم

(٣٣)

أ = ٢٠٠٠ ، ر = $\frac{7}{100}$ = ٠,٠٧

، الفترة الزمنية ن = ١١ ساعة

∴ دالة النمو الأسي هي د(ن) = أ (١ + ر)^ن

= ٢٠٠٠ (١ + ٠,٠٧)^ن

= ٢٠٠٠ (١,٠٧)^ن

∴ كمية البكتريا بعد ١١ ساعة = ٢٠٠٠ (١,٠٧)^{١١}

≈ ٤٢١٠ بكتريا.

(٣٤)

باستخدام العلاقة جـ = أ $(1 + \frac{ر}{ن})^{ن ت}$

① العائد السنوي ∴ ن = ١

جـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠} ≈ ١٠٧٩٤,٦٢ جنيه

② العائد الربع سنوي ∴ ن = ٤

جـ = ٥٠٠٠ $(1 + \frac{0,08}{4})^{4 \times 10}$ ≈ ١١٠٤٠,٢٠ جنيه

③ العائد الشهري ∴ ن = ١٢

جـ = ٥٠٠٠ $(1 + \frac{0,08}{12})^{12 \times 10}$ ≈ ١١٠٩٨,٢ جنيه

(٣٥)

① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (جـ)

⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (أ)

إرشادات لحل رقم (٣٦)

① ∵ الدالة متناقصة إذا كان ٠ < ٢ب − ١ < ١

∴ ...

---

⑦ ∵ الدالة تزايدية ∴ $\frac{2}{ب}$ > ١ ∴ ب < ٢

⑧ ∵ د(س) = $\frac{4^{س}}{4^{س}+2}$ ، د(١ − س) = ...

④ بوضع س = $\frac{1}{2}$ ص + ٤ ∴ ص = ٢ س − ٨

∴ د^{−١}(س) = ٢ س − ٨

⑪ ∵ ص = (س + ٢)^٢ حيث س ∈ [−٢ ، ∞[

وبتبديل المتغيرين

∴ س = (ص + ٢)^٢ حيث ص ∈ [−٢ ، ∞[

∴ 0 < 4/أ < 1 ∴ ... ، الفترة الزمنية ن = ٩ سنوات.

③ ∵ الدالة تزايدية ∴ $\frac{أ}{2} > 1$ ∴ أ > 2

④ ∵ د(س) = $(أ - 2)^{س}$ دالة أسية.

∴ أ − 2 > 0 ، أ − 2 ≠ 1

∴ أ > 2 ، أ ≠ 3

∴ أ ∈]2 ، ∞[− {3}

④ المنحنى يقطع محور السينات عندما ص = 0 ، وبالتعويض عن د(س) = 0 في الدوال المعطاة لا نحصل على أي قيمة للمتغير س إلا في الحالة رقم (ج)

$3^{س} - 1 = 0$ ∴ $3^{س} = 1$ ∴ س = 0

أي المنحنى يقطع محور السينات في النقطة (0 ، 0)

⑤ بحل المعادلتين ص = 8 ، ص = $2^{س}$ معًا

∴ س = 3

وبحل المعادلتين ص = 8 ، ص = $(\frac{1}{2})^{س}$ معًا

∴ س = −3

∴ أ(3 ، 8) ، ب(−3 ، 8)

∴ طول $\overline{أب}$ = 6 وحدات.

⑥ نعلم أن انعكاس منحنى الدالة د(س) = $3^{س}$ حول محور الصادات يعطي منحنى الدالة د(س) = $3^{-س}$ ثم إزاحته 5 وحدات لأعلى يعطي المنحنى د(س) = 5 + $3^{-س}$

⑦ ∵ د(س) = $\frac{9^{س}}{9^{س} + 3}$

∴ د(1 − س) = $\frac{9^{1-س}}{9^{1-س} + 3}$

بالضرب بسطًا ومقامًا في $9^{س}$

∴ د(1 − س) = $\frac{9}{9 + 3 \times 9^{س}} = \frac{3}{3 + 9^{س}}$

∴ د(س) + د(1 − س)

$= \frac{9^{س}}{9^{س} + 3} + \frac{3}{3 + 9^{س}} = \frac{9^{س} + 3}{9^{س} + 3} = 1$

⑧ ∵ د(س) = $\frac{4^{س}}{4^{س} + 2}$

∴ د(1 − س) = $\frac{4^{1-س}}{4^{1-س} + 2}$

بالضرب بسطًا ومقامًا في $4^{س}$

∴ د(1 − س) = $\frac{4}{4 + 2 \times 4^{س}}$

$= \frac{4}{2(2 + 4^{س})} = \frac{2}{2 + 4^{س}}$

∴ د(س) + د(1 − س)

$= \frac{4^{س}}{4^{س} + 2} + \frac{2}{2 + 4^{س}} = \frac{4^{س} + 2}{4^{س} + 2} = 1$

∴ د$(\frac{1}{11})$ + د$(\frac{10}{11})$ = 1

، د$(\frac{2}{11})$ + د$(\frac{9}{11})$ = 1

، د$(\frac{3}{11})$ + د$(\frac{8}{11})$ = 1

، د$(\frac{4}{11})$ + د$(\frac{7}{11})$ = 1

، د$(\frac{5}{11})$ + د$(\frac{6}{11})$ = 1

∴ المقدار المطلوب = 5

إجابات تمارين ٩

1

① (ج) ② (د) ③ (ب) ④ (ج)
⑤ (ب) ⑥ (ج) ⑦ (ب) ⑧ (ج)
⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (ب) ⑫ (ب)
⑬ (ب) ⑭ (ج) ⑮ (أ) ⑯ (أ)

2

①

س	7	4	1	−10
$د^{-1}$(س)	−2	1	2	5

② $د^{-1}$ = {(2 ، 1) ، (3 ، 2) ، (4 ، 3)}

③ بوضع س = 2ص + 5 ∴ ص = $\frac{س - 5}{2}$

∴ $د^{-1}$(س) = $\frac{س - 5}{2}$

④ بوضع س = $\frac{1}{2}$ص + 4 ∴ ص = 2س − 8

∴ $د^{-1}$(س) = 2س − 8

⑤ بوضع س = $\frac{4}{ص}$ + 5 ∴ $\frac{4}{ص}$ = س − 5

∴ ص = $\frac{4}{س - 5}$ ∴ $د^{-1}$(س) = $\frac{4}{س - 5}$

⑥ بوضع س = 8$ص^3$ − 1 ∴ 8$ص^3$ = س + 1

∴ $ص^3 = \frac{1}{8}$(س + 1)

∴ ص = $\frac{1}{2}\sqrt[3]{س + 1}$

∴ $د^{-1}$(س) = $\frac{1}{2}\sqrt[3]{س + 1}$

⑦ بوضع س = $\sqrt[3]{ص + 1}$

∴ ص + 1 = $س^3$ ∴ ص = $س^3$ − 1

∴ $د^{-1}$(س) = $س^3$ − 1

⑧ بوضع س = $\sqrt[3]{4 - ص}$ ∴ 4 − ص = $س^3$

∴ ص = 4 − $س^3$

∴ $د^{-1}$(س) = 4 − $س^3$

⑨ ∵ ص = 2 + $\sqrt{3 - س}$ حيث س ≤ 3 ، ص ≥ 2

وبتبديل المتغيرين

∴ س = 2 + $\sqrt{3 - ص}$

حيث ص ≤ 3 ، س ≥ 2 ∴ $\sqrt{3 - ص}$ = س − 2

∴ 3 − ص = $(س - 2)^2$

∴ ص = 3 − $(س - 2)^2$

∴ $د^{-1}$(س) = 3 − $(س - 2)^2$ لكل س ≥ 2

⑩ ∵ ص = $س^2$ حيث س ≥ 0 ، ص ≥ 0

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $ص^2$ حيث ص ≥ 0 ، س ≥ 0

∴ ص = $\sqrt{س}$

∴ $د^{-1}$(س) = $\sqrt{س}$ لكل س ≥ 0

⑪ ∵ ص = $(س + 2)^2$ حيث س ≥ −2 ، ص ≥ 0

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $(ص + 2)^2$ حيث ص ≥ −2 ، س ≥ 0

∴ ص + 2 = $\sqrt{س}$ ∴ ص = $\sqrt{س}$ − 2

∴ $د^{-1}$(س) = $\sqrt{س}$ − 2 لكل س ≥ 0

⑫ ∵ ص = $(س - 1)^2$ + 2 حيث س ≥ 1 ، ص ≥ 2 وبتبديل المتغيرين

∴ س = $(ص - 1)^2$ + 2 حيث ص ≥ 1 ، س ≥ 2

∴ $(ص - 1)^2$ = س − 2

∴ ص − 1 = $\sqrt{س - 2}$

∴ ص = $\sqrt{س - 2}$ + 1

∴ $د^{-1}$(س) = $\sqrt{س - 2}$ + 1 لكل س ≥ 2

⑬ ∵ ص = $س^2$ + 8س + 7 = $(س + 4)^2$ − 9 حيث س ≥ −4 ، ص ≥ −9 وبتبديل المتغيرين

∴ س = $ص^2$ + 8ص + 7 حيث ص ≥ −4 ، س ≥ −9

∴ س = $ص^2$ + 8ص + 16 − 9

∴ س = $(ص + 4)^2$ − 9

∴ $(ص + 4)^2$ = س + 9

∴ ص + 4 = $\sqrt{س + 9}$

∴ ص = $\sqrt{س + 9}$ − 4

∴ $د^{-1}$(س) = $\sqrt{س + 9}$ − 4 لكل س ≥ −9

⑭ ∵ ص = $\sqrt{9 - س^2}$ حيث −3 ≤ س ≤ 0 ، 0 ≤ ص ≤ 3 وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\sqrt{9 - ص^2}$ ، −3 ≤ ص ≤ 0 ، 0 ≤ س ≤ 3

∴ $س^2$ = 9 − $ص^2$ ∴ $ص^2$ = 9 − $س^2$

∴ ص = −$\sqrt{9 - س^2}$

∴ $د^{-1}$(س) = −$\sqrt{9 - س^2}$ لكل 0 ≤ س ≤ 3

⑩ $ص = \sqrt{٩ - س^٢}$ حيث $٠ \le س \le ٢$

$\therefore ٠ \le ص \le ٢$ وبتبديل المتغيرين

$\therefore س = \sqrt{٩ - ص^٢}$ ، $٠ \le ص \le ٢$

$٠ \le س \le ٢$

$\because س^٢ = ٩ - ص^٢$ $\therefore ص^٢ = ٩ - س^٢$

$\therefore ص = \sqrt{٩ - س^٢}$

$\therefore د^{-١}(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$ لكل $٠ \le س \le ٢$

⑪ $\because ص = \frac{١}{س^٢ + ٢}$ ، $س \in ح$

، $ص \in]٠ ، \frac{١}{٢}]$

وبتبديل المتغيرين

$\therefore س = \frac{١}{ص^٢ + ٢}$ ، $ص \in ح^+$

، $س \in]٠ ، \frac{١}{٢}]$

$\therefore ص^٢ + ٢ = \frac{١}{س}$ $\therefore ص^٢ = \frac{١}{س} - ٢$

$\therefore ص = \sqrt{\frac{١}{س} - ٢}$

$\therefore د^{-١}(س) = \sqrt{\frac{١}{س} - ٢}$ ، $س \in]٠ ، \frac{١}{٢}]$

٣

① لها دالة عكسية ② ليس لها دالة عكسية

③ ليس لها دالة عكسية ④ ليس لها دالة عكسية

٤

① $\because (د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د\left(\frac{س + ٣}{٢}\right) = ٢\left(\frac{س + ٣}{٢}\right) - ٣$

$= س + ٣ - ٣ = س$

، $(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر(٢س - ٣) = \frac{(٢س - ٣) + ٣}{٢} = س$

$\therefore$ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

② $\because (د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د(\sqrt{س - ٤}) = (\sqrt{س - ٤})^٢ + ٤$

$= س - ٤ + ٤ = س$

، $\because (ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر(س^٢ + ٤) = \sqrt{س^٢ + ٤ - ٤}$

$= \sqrt{س^٢} = |س|$

، $\because س \ge ٠$ $\therefore (ر \circ د)(س) = س$

$\therefore$ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

③ $ر(س) = \frac{٥س - ٢}{س}$

$\therefore ر(س) = ٥ - \frac{٢}{س}$

$\therefore (د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د\left(٥ - \frac{٢}{س}\right) = \frac{-٢}{٥ - \frac{٢}{س} - ٥} = س$

، $(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر\left(\frac{-٢}{س - ٥}\right) = ٥ - \frac{٢}{\frac{-٢}{س - ٥}}$

$= ٥ + س - ٥ = س$

$\therefore$ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

④ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د\left(\frac{س^٢}{٤}\right) = \sqrt{٤ \times \frac{س^٢}{٤}} = س$

، $(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر(\sqrt{٤س})$

$= \frac{(\sqrt{٤س})^٢}{٤}$

$= \frac{٤س}{٤} = س$

$\therefore$ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

٥

① $ص = ٥س$ وبتبديل المتغيرين

$\therefore س = ٥ص$

$\therefore ص = \frac{١}{٥}س$

$\therefore د^{-١}(س) = \frac{١}{٥}س$



② $د^{-١}(س) + ٢ د^{-١}(ص) = ٣ + ٢ \times ٤ = ١١$

٦

①



②











∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.



٧

① ∵ د(س) = ٢ س ∴ ص = ٢ س

بتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص

∴ ص = $\frac{1}{2}$ س

∴ د$^{-1}$(س) = $\frac{1}{2}$ س ≠ د(س)

∴ د معكوسها ليس نفسها.

② ∵ د(س) = − س ∴ ص = − س

بتبديل المتغيرين ∴ س = − ص

∴ ص = − س

∴ د$^{-1}$(س) = − س = د(س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

③ ∵ د(س) = $\frac{٢}{س}$ ∴ ص = $\frac{٢}{س}$

بتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{٢}{ص}$

∴ ص = $\frac{٢}{س}$

∴ د$^{-1}$(س) = $\frac{٢}{س}$ = د(س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

④ ∵ د(س) = ٧ − س ∴ ص = ٧ − س

بتبديل المتغيرين ∴ س = ٧ − ص

∴ ص = ٧ − س

∴ د$^{-1}$(س) = ٧ − س = د(س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

⑤ ∵ د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٥ ∴ ص = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٥ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ٣}$ + ٥

∴ س − ٥ = $\frac{١}{ص - ٣}$

∴ ص − ٣ = $\frac{١}{س - ٥}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٣

∴ د$^{-1}$(س) = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٣ ≠ د(س)

∴ د معكوسها ليس نفسها.

⑥ ∵ د(س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

∴ ص = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ك}$ + ك

∴ س − ك = $\frac{١}{ص - ك}$

∴ ص − ك = $\frac{١}{س - ك}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

∴ د$^{-1}$(س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك = د(س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

٨

إجابة رنا هي الصواب لأن: د$^{-1}$(س) ≠ $\frac{١}{د(س)}$ كما في إجابة وائل

٩

① ∵ د(س) = س^2

∴ د ليست أحادية على مجالها = ح

وتكون أحادية إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[

أو س ∈]−∞ ، ٠]

∴ المجال الذي يكون فيه للدالة د دالة عكسية

= [٠ ، ∞[أو]−∞ ، ٠]

② ∵ د(س) = س^3

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذي يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

③ ∵ د(س) = $\frac{1}{2}$ س

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذي يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

١٠

∵ ص = $\frac{س - ١}{س + ٥}$ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{ص - ١}{ص + ٥}$

∴ س ص + ٥ س = ص − ١

∴ س ص − ص = −٥ س − ١

∴ ص(س − ١) = −٥ س − ١

∴ ص = $\frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

∴ د$^{-1}$(س) = $\frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

١١

∵ د(س) = ٢ س + أ ∴ ص = ٢ س + أ

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ ص + أ

∴ ص = $\frac{س - أ}{٢}$ = $\frac{1}{2}$ س − $\frac{أ}{٢}$

∴ د$^{-1}$(س) = $\frac{1}{2}$ س − $\frac{أ}{٢}$

∵ د$^{-1}$(س) = ر(س)

∴ $\frac{1}{2}$ س − $\frac{أ}{٢}$ = ب س + ٣

∴ ب = $\frac{1}{2}$ ، − $\frac{أ}{٢}$ = ٣

∴ أ = −٦

١٢

①(أ) ②(ج) ③(أ) ④(أ)

⑤(ج) ⑥(د) ⑦(ب) ⑧(أ)

إرشادات لحل رقم ١٢

① ∵ د$^{-1}$(٩) = ٣

∴ النقطة (٣ ، ٩) ∈ منحنى الدالة

، ∵ د$^{-1}$(٥) = ٢

∴ النقطة (٢ ، ٥) ∈ منحنى الدالة

، ∵ د(س) = أ س + ب

∴ ٣ أ + ب = ٩ (١)

، ٢ أ + ب = ٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ أ = ٤ ، ب = −٣

∴ أ × ب = ٤ × −٣ = −١٢

② ∵ ر(س) = س − ٣

∴ ر$^{-1}$(س) = س + ٣

، ∵ ر(د(س)) = ر(س^2) = س^2 − ٣

، ∵ ر(د(س)) = ر$^{-1}$(س)

∴ س^2 − ٣ = س + ٣

∴ س^2 − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢)(س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ ، س = ٣

∴ م ح = {٣ ، −٢}

③ نضع د(س) = ٣ ونوجد قيمة س

∴ س = $\frac{د(س) + ١}{٢ - د(س)}$ = $\frac{٣ + ١}{٢ - ٣}$ = −٤

∴ د(−٤) = ٣ ∴ د$^{-1}$(٣) = −٤

④ ∵ المجال ح − {١} ∴ ب = ١

∴ د(س) = $\frac{أ س + ٢}{س - ١}$ = أ + $\frac{أ + ٢}{س - ١}$

من قاعدة الدالة نجد أن نقطة تماثل المنحنى هي (١ ، أ)

ومن المجال والمجال المقابل نجد أن نقطة تماثل المنحنى هي (١ ، ٢)

∴ أ = ٢

∴ د(س) = $\frac{٢ س + ٢}{س - ١}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{٢ ص + ٢}{ص - ١}$

∴ س ص − س = ٣ ص + ٣

(س − ٣) ص = س + ٣ ∴ ص = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} − ٣}$

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} − ٣}$

∴ د$^{-١}$ (١) = −٢

⑤ ∵ د (س) = $\sqrt[٣]{\text{س} − ٥}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\sqrt[٣]{\text{ص} − ٥}$

∴ ص = س^{٣} + ٥

∴ د$^{-١}$ (س) = س^{٣} + ٥

∴ (ر ∘ د$^{-١}$) (س) = ر (د$^{-١}$ (س))

= ر (س^{٣} + ٥)

= ٢ (س^{٣} + ٥) − ٧

= ٢ س^{٣} + ٣

⑥ ∵ د (س) = ٣ س − ٤ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٣ ص − ٤

∴ ص = $\frac{\text{س} + ٤}{٣}$ ∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{\text{س} + ٤}{٣}$

∴ د$^{-١}$ (س + ٢) = $\frac{\text{س} + ٢ + ٤}{٣}$ = $\frac{\text{س} + ٦}{٣}$

⑦ ∵ د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣ س + ١

= (س^{٣} + ١) + (٣ س^{٢} + ٣ س)

= (س + ١) (س^{٢} − س + ١) + ٣ س (س + ١)

= (س + ١) (س^{٢} − س + ١ + ٣ س)

= (س + ١) (س^{٢} + ٢ س + ١)

= (س + ١) (س + ١)^{٢} = (س + ١)^{٣}

وبتبديل المتغيرين

∴ س = (ص + ١)^{٣} ∴ ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ − ١

∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ − ١

⑧ ∵ منحنى د$^{-١}$ يمر بالنقطتين (−٢ ، ٠) ، (−٣ ، −٢)

∴ د$^{-١}$ (−٢) = ٠ ∴ د (٠) = −٢

د$^{-١}$ (−٣) = −٢ ∴ د (−٢) = −٣

∴ (د ∘ د) (صفر) = د (د (صفر)) = د (−٢) = −٣

إجابات تمارين 10

١

① ٢^{٧} = ١٢٨ ② $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢}$ = $\frac{٤}{٢٥}$

③ (٢)$^{\frac{٥}{٢}}$ = ٤ $\sqrt{٢}$

٢

① لو$_{٥}$ ١ = صفر ② لو$_{١٠}$ ٠,٠٠٠١ = −٤

③ لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = −٣

٣

① بفرض : لو$_{٢}$ ١٦ = س

∴ ٢$^{\text{س}}$ = ١٦ ∴ ٢$^{\text{س}}$ = ٢^{٤}

∴ س = ٤ ∴ لو$_{٢}$ ١٦ = ٤

② بفرض : لو$_{٨}$ ١ = س

∴ ٨$^{\text{س}}$ = ١ = ٨^{٠} ∴ س = صفر

∴ لو$_{٨}$ ١ = صفر

③ بفرض : لو ٠,٠٠٠٠١ = س

∴ ١٠$^{\text{س}}$ = ٠,٠٠٠٠١ ∴ ١٠$^{\text{س}}$ = $\frac{١}{١٠٠٠٠٠}$

∴ ١٠$^{\text{س}}$ = ١٠$^{-٥}$ ∴ س = −٥

∴ لو ٠,٠٠٠٠١ = −٥

④ بفرض : لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = س

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{س}}$ = ١٢٨ = ٢^{٧}

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{س}}$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٧}$ ∴ س = −٧

∴ لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = −٧

⑤ بفرض : لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = س ∴ ٢$^{\text{س}}$ = $\frac{١}{٨}$

∴ ٢$^{\text{س}}$ = ٢$^{-٣}$ ∴ س = −٣

∴ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = −٣

⑥ بفرض : لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = س

∴ $(\sqrt{٢})^{\text{س}}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ = $(\sqrt{٢})^{٧}$

∴ س = ٧ ∴ لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = ٧

⑦ بفرض : لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = س

∴ ٣$^{\text{س}}$ = $\sqrt[٤]{٢٧}$ ∴ ٣$^{\text{س}}$ = (٣)$^{\frac{٣}{٤}}$

∴ س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = $\frac{٣}{٤}$

⑧ بفرض : لو$_{٢}$ جتا ٤٥° = لو$_{٢}$ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = س

∴ ٢$^{\text{س}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ٢$^{\text{س}}$ = ٢$^{-\frac{١}{٢}}$

∴ س = −$\frac{١}{٢}$ ∴ لو$_{٢}$ جتا ٤٥° = −$\frac{١}{٢}$

٤

① ٢^{٧} = س ∴ س = ١٢٨

② $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-١}$ = س ∴ س = ٣

③ ٥$^{-٢}$ = س ∴ س = $\frac{١}{٢٥}$

④ ٣^{٤} = س^{٢} ∴ ٨١ = س^{٢} ∴ س = ± ٩

⑤ (٨١)$^{\frac{٣}{٤}}$ = س ∴ س = ٢٧

⑥ ٢$^{-٥}$ = س$^{-١}$ ∴ $\frac{١}{٣٢}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ ∴ س = ٣٢

⑦ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٤}$ = ٢$^{\text{س}}$ ∴ ٢$^{\text{س}}$ = ٢^{٤} ∴ س = ٤

⑧ ٢ = لو$_{٣}$ س ∴ س = ٣^{٢} = ٩

⑨ (٣)^{٠} = ٢ س − ٥ ∴ ١ = ٢ س − ٥

∴ س = ٣

⑩ ٦$^{\frac{١}{٢}}$ = (س + ٤)$^{\frac{١}{٢}}$ ∴ س + ٤ = ٦

∴ س = ٢

⑪ ٨$^{\frac{٣}{٢}}$ = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤٨}$ ∴ ٨^{٣} = س^{٢} + ٤٨

∴ س^{٢} = ١٦ ∴ س = ± ٤

⑫ لو$_{٢}$ (س^{٢} − ٢ س) = ٣

∴ ٢^{٣} = س^{٢} − ٢ س

∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٢

⑬ ٥ = | ٢ س + ١ |

∴ ٢ س + ١ = ٥ أ، ٢ س + ١ = −٥

∴ س = ٢ أ، س = −٣

⑭ ٢^{٤} = س (س + ٦)

∴ س^{٢} + ٦ س − ١٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ٨) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −٨

⑮ ٣ = س^{٢} − ٢ س

∴ س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −١

⑯ (لو$_{٣}$ س − ٤) (لو$_{٣}$ س − ٥) = ٠

∴ لو$_{٣}$ س = ٤ ومنها س = ٣^{٤} = ٨١

أ، لو$_{٣}$ س = ٥ ومنها س = ٣^{٥} = ٢٤٣

⑰ ٣$^{\text{لو}_{٢}\text{س}}$ = ٩ = ٣^{٢} ∴ لو$_{٢}$ س = ٢

∴ س = ٢^{٢} = ٤

⑱ ٢$^{\text{س}}$ − ٢$^{\text{س} - ٢}$ = ٢^{٣}

∴ ٢$^{\text{س} - ٢}$ (٢^{٢} − ١) = ٨ ∴ ٢$^{\text{س} - ٢}$ = ١

∴ س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

⑲ ٢$^{\text{لو}(\text{س} + ١,٢٥)}$ = ٢$^{-١}$

∴ لو (س + ١,٩٥) = −١

∴ ١٠$^{-١}$ = س + ١,٩٥ ∴ س = [illegible]

⑳ لو٢ (س − ٢) = ٢
∴ لو٢ (س − ٢) = ٢ ومنها لو٢ س = ٤
∴ س = ١٠٠ أو لو٢ (س − ٢) = −٢
ومنها لو٢ س = ٠ ∴ س = ١

■

① $س^٣ = ١٢٥ = ٥^٣$ ∴ س = ٥
∴ مجموعة الحل = {٥}

② $س^٢ = ٣$ ∴ س = $\sqrt{٣}$
∴ مجموعة الحل = {$\sqrt{٣}$}

③ $س^{-٢} = ٣$ ∴ $س^٢ = \frac{١}{٣}$
∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ويرفض الحل السالب)
∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}

④ $س^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{١}{١٠٠٠}$
∴ س = $(١٠^{-٣})^{-\frac{٤}{٣}} = ١٠٠٠٠$
∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠٠}

⑤ $(-س)^٤ = ٨١ = ٣^٤$
∴ س = −٣ (ويرفض الحل الموجب)
∴ مجموعة الحل = {−٣}

⑥ $(س − ١)^٣ = ٢٧ = ٣^٣$ ∴ س − ١ = ٣
∴ س = ٤ ∴ مجموعة الحل = {٤}

⑦ $(س − ١)^٢ = ٧ − س$
∴ $س^٢ − ٢س + ١ = ٧ − س$
∴ $س^٢ − س − ٦ = ٠$
∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠
∴ س = −٢ (مرفوض) أو س = ٣
∴ مجموعة الحل = {٣}

⑧ $(\frac{٢}{س})^{-٢} = ١٦$ ∴ $(\frac{س}{٢})^٢ = ٤^٢$
∴ $\frac{س}{٢} = ٤$ ∴ س = ٨
∴ مجموعة الحل = {٨}

⑨ $س^٢ = ٥س$ ∴ $س^٢ − ٥س = ٠$
∴ س (س − ٥) = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض)
أو س = ٥
∴ مجموعة الحل = {٥}

⑩ $س^٣ = ٦٤س$ ∴ س ($س^٢$ − ٦٤) = ٠
∴ س = صفر (مرفوض) أو $س^٢$ = ٦٤
ومنها س = ٤
∴ مجموعة الحل = {٤}

⑪ $س^{\frac{٣}{٢}} = س^٢$ ∴ س = ١
∴ س = $\frac{١}{٢}$ مع ملاحظة أن س ∈ ح − {١}
∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٢}$}

⑫ لو٣ ٢٧ = ٩ − ١ ∴ لو٣ ٢٧ = ٣
∴ $س^٣ = ٢٧ = ٣^٣$ ∴ س = ٣
∴ مجموعة الحل = {٣}

⑬ $س = س^٢ − ١٢$
∴ $س^٢ − س − ١٢ = ٠$
∴ (س − ٤) (س + ٣) = ٠
∴ س = ٤ أو س = −٣ (مرفوض)
∴ مجموعة الحل = {٤}

⑭ $س^٢ = ٢س + ٨$
∴ $س^٢ − ٢س − ٨ = ٠$
∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠
∴ س = ٤ أو س = −٢ (مرفوض)
∴ مجموعة الحل = {٤}

⑮ س = $\sqrt{س − ٢}$ + ٢
∴ $\sqrt{س − ٢}$ = س − ٢ وبتربيع الطرفين
∴ س − ٢ = $س^٢$ − ٤س + ٤
∴ $س^٢$ − ٥س + ٦ = ٠
∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠
∴ س = ٢ أو س = ٣
∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣}

⑯ (لو٣ س)^٢ − ٨ لو٣ س + ١٥ = ٠
∴ (لو٣ س − ٥) (لو٣ س − ٣) = ٠
∴ لو٣ س = ٥ أو لو٣ س = ٣
∴ س = $٣^٥$ = ٢٤٣ أو س = $٣^٣$ = ٢٧
∴ مجموعة الحل = {٢٤٣ ، ٢٧}

⑰ بفرض أن لو٣ (س − ٢) = ك
∴ س − ٢ = $٣^ك$ (١)
، لو٩ (س − ٢) = ص
∴ س − ٢ = $٩^ص$ = $٣^{٢ص}$ (٢)
، من (١) ، (٢) ينتج أن ٢ص = ك
∴ ص + ٢ص = ٤ ∴ ص = ١
∴ ك = ٢
أي أن لو٣ (س − ٢) = ٢
∴ $٣^٢$ = س − ٢ ∴ س = ١١
∴ مجموعة الحل = {١١}

■

① $(\frac{٥}{٢})^{-س} = \frac{١٦}{٦٢٥} = (\frac{٢}{٥})^٤ = (\frac{٥}{٢})^{-٤}$ ∴ س = ٤

② $٤^س = ٨\sqrt{٢}$ ∴ $٢^{٢س} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$
∴ ٢س = $\frac{٧}{٢}$ ∴ س = $\frac{٧}{٤}$

③ $(\sqrt{٥})^س = ١٢٥ = (\sqrt{٥})^٦$
∴ $س^٢ = ٩$ ∴ س = ٣

④ $(١٠)^{٢س + ١} = \frac{١}{١٠} = (١٠)^{-١}$
∴ ٢س + ١ = −١ ∴ س = −١

⑤ $(٠.٣)^{س^٢} = ٠.٠٠٩ = (٠.٣)^٣$
∴ $س^{-٢} = ٣$ ∴ $س^٢ = \frac{١}{٣}$
∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

⑥ $٢^{٣س}$ = لو٢ ٨ ∴ $٢^{٣س} = ٣$
∴ ٣س = ٣ ∴ س = ١

⑦ لو٢ ($٢^{٣س}$ − ٤) = ٥ − س
∴ $٢^{٥ − س}$ = $٢^{٣س}$ − ٤ بالضرب × $٢^س$
∴ ٣٢ = $٢^{٤س}$ − ٤ × $٢^س$
∴ $٢^{٤س}$ − ٤ × $٢^س$ − ٣٢ = ٠
∴ ($٢^{٢س}$ − ٨) ($٢^{٢س}$ + ٤) = ٠
∴ $٢^{٢س}$ = ٨ أو $٢^{٢س}$ = −٤ (مرفوض)
∴ $٢^{٢س} = ٢^٣$ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

⑧ $٤^٢$ = ١٢ + لو٣ (س − ١)
∴ لو٣ (س − ١) = ٢ ∴ $٣^٢$ = س − ١
∴ س = ١٠

⑨ $\frac{س^٢}{٢س − ٢}$ = ٣ ∴ $س^٢$ − ٦س + ٩ = ٠
∴ $(س − ٣)^٢$ = ٠ ∴ س = ٣

■

① (ب) ② (ب) ③ (جـ)
④ (جـ) ⑤ (ب) ⑥ (د)

■

① −٠.١٩٨٣ ② ١.٧٥٤٩ ③ −٢.٠٩٨٣

٩

① ١,٧١٥٩ ② ٢٥,٨٢٢٦ ③ ٠,٥٠١٢

١٠

① ∵ لو~س~ ١٦ = ص ∴ س^ص^ = ١٦

وبالتعويض فى المعادلة الأولى

∴ ١٦ = ٥ س − ٤ ∴ س = ٤

∴ لو~٤~ ١٦ = ص ∴ ٤^ص^ = ١٦ = ٤^٢^

∴ ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٤ ، ٢)}

② ∵ لو~س~ ٩ = ١ ∴ ص = ٩

∴ لو~س~ لو~٢~ لو~س~ ٩ = ٠

∴ لو~٢~ لو~س~ ٩ = س^٠^ = ١ ∴ لو~س~ ٩ = ٢

∴ س^٢^ = ٩ ∴ س = ٣ (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ٩)}

١١

∵ لو~١٦~ ٤٩ = أ ∴ (١٦)^أ^ = ٤٩

∴ (٤^٢^)^أ^ = ٧^٢^ ∴ (٤^أ^)^٢^ = ٧^٢^

∴ ٤^أ^ = ٧

، ∵ لو~٧~ ٢,٥ = ب ∴ ٧^ب^ = ٢,٥

∴ ٤^أ ب + ١^ = ٤^أ ب^ × ٤ = (٤^أ^)^ب^ × ٤ = ٧^ب^ × ٤

= ٢,٥ × ٤ = ١٠

١٢

① ٢ س + ١ > ٠ ∴ س > −$\frac{1}{2}$

∴ مجال الدالة =]−$\frac{1}{2}$ ، ∞[

② س > ٠ ∴ مجال الدالة =]٠ ، ∞[

③ الدالة معرفة لجميع قيم س التى

تحقق أن: {س > ٠ ، س ≠ ١}

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ∞[− {١}

④ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{س > ٠ ، س − ٢ > ٠ ، س − ٢ ≠ ١} أى أن : {س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣}

أى أن : مجال الدالة =]٢ ، ∞[− {٣}

⑤ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{س > ٠ ، ٢ − س > ٠ ، ٢ − س ≠ ١} أى أن : {س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١}

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ٢[− {١}

⑥ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{س − ٣ > ٠ ، ٥ − س > ٠ ، ٥ − س ≠ ١} أى أن : {س > ٣ ، س < ٥ ، س ≠ ٤}

أى أن : مجال الدالة =]٣ ، ٥[− {٤}

⑦ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{س^٢^ > ٠ ، س − ٣ > ٠ ، س − ٣ ≠ ١} أى أن : {س^٢^ > ٠ ، س > ٣ ، س ≠ ٤}

أى أن : مجال الدالة =]٣ ، ∞[− {٤}

⑧ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{٢ س + ١ > ٠ ، س + ٢ > ٠ ، س + ٢ ≠ ١} أى أن : {س > −$\frac{1}{2}$ ، س > −٢ ، س ≠ −١}

أى أن : مجال الدالة =]−$\frac{1}{2}$ ، ∞[

⑨ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

(٣ − س) (س + ١) > ٠



أى أن : مجال الدالة =]−١ ، ٣[

⑩ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{(٣ − س) (س + ١) > ٠ ، س > ٠ ، س ≠ ١}



أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ٣[− {١}

١٣

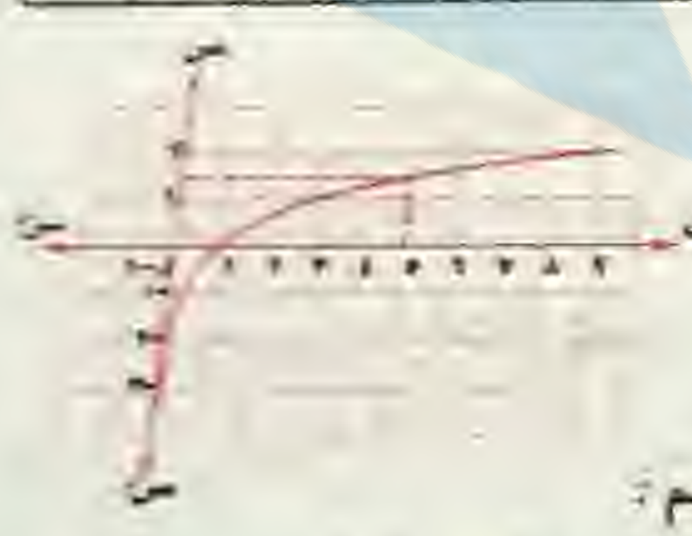
∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

∴ ٤ = لو~أ~ ٨١ ∴ أ^٤^ = ٨١

∴ أ = ٣

(ويرفض الحل السالب)

س	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	١	٣	٩
د (س)	−٢	−١	٠	١	٢



من الرسم :

المجال = ح^+^ ، المدى = ح

والدالة تزايدية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات (١ ، ٠)

، لو~٣~ ٥ = ١,٥

١٤

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة ($\frac{1}{8}$ ، ٣)

∴ ٣ = لو~أ~ $\frac{1}{8}$ ∴ أ^٣^ = $\frac{1}{8}$ ∴ أ = $\frac{1}{2}$

س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤
د (س)	٢	١	٠	−١	−٢



من الرسم :

المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات = (١ ، ٠)

، لو~$\frac{1}{2}$~ ٣ ≈ −١,٥٨

١٥

① (ب) ② (ج) ③ (ج) ④ (ب)

⑤ (ج) ⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (أ)

⑨ (ج) ⑩ (ج) ⑪ (د)

١٦

① منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه وص



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها

② منحنى الدالة ن هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه وس



من الرسم : المجال =]-١ ، ∞[
، المدى = ح
، الدالة تناقصية على مجالها.

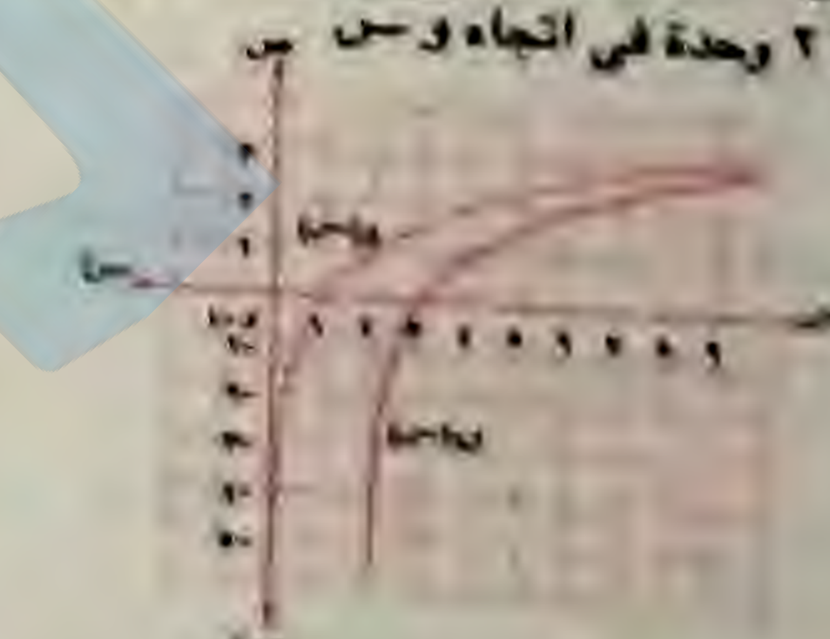
③ منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس في محور السينات



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[، المدى = ح
، الدالة تزايدية على مجالها.

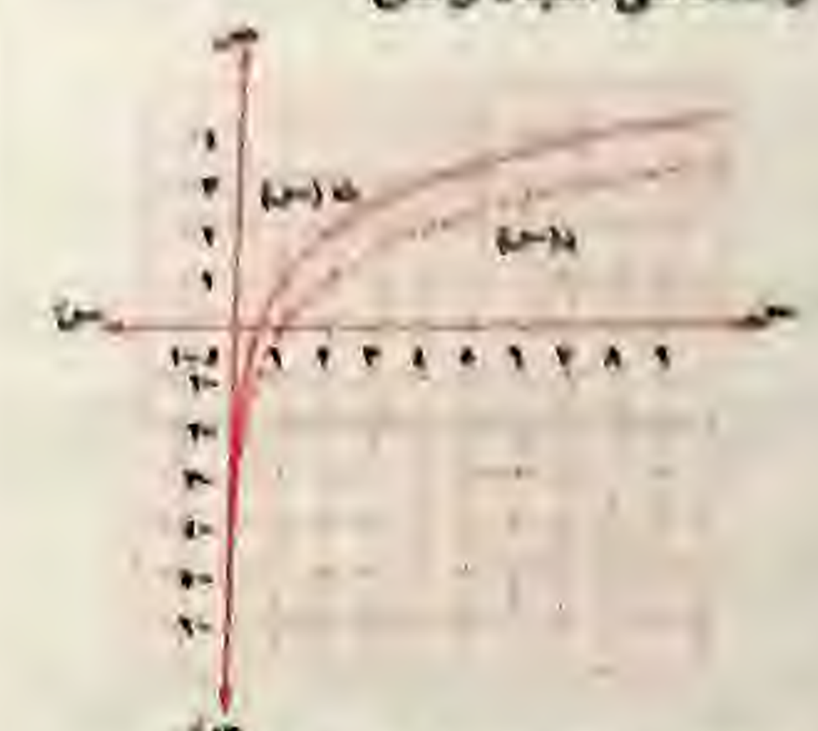
١٧

① منحنى الدالة ن هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و س



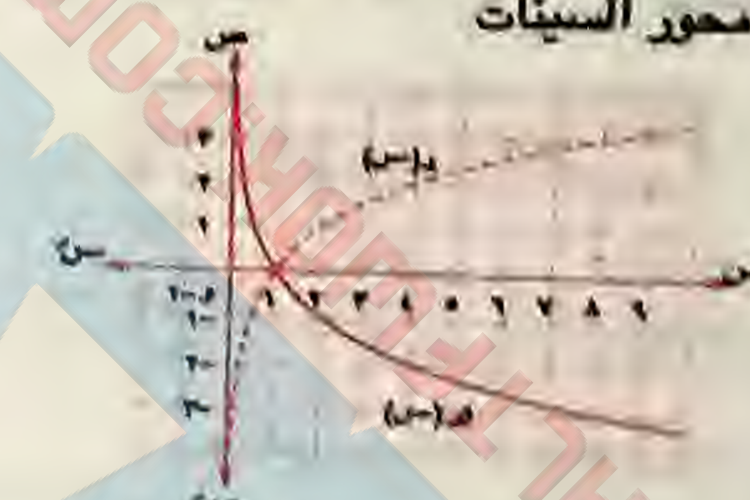
من الرسم : المجال =]٢ ، ∞[
، المدى ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

② منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة وحدة واحدة في اتجاه و ص



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[
، المدى = ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

③ منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور السينات



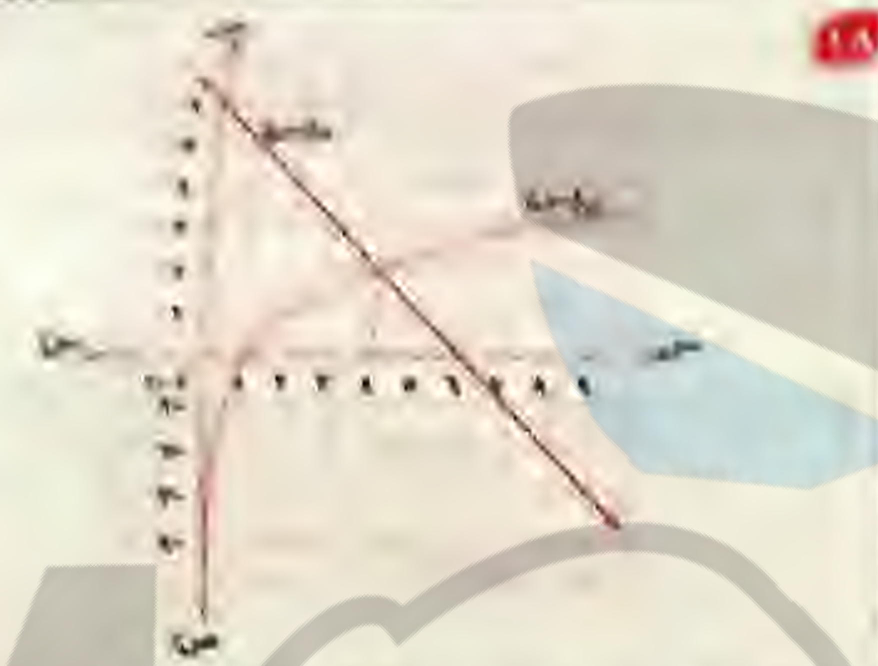
من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[
، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

④ منحنى الدالة ك هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور الصادات



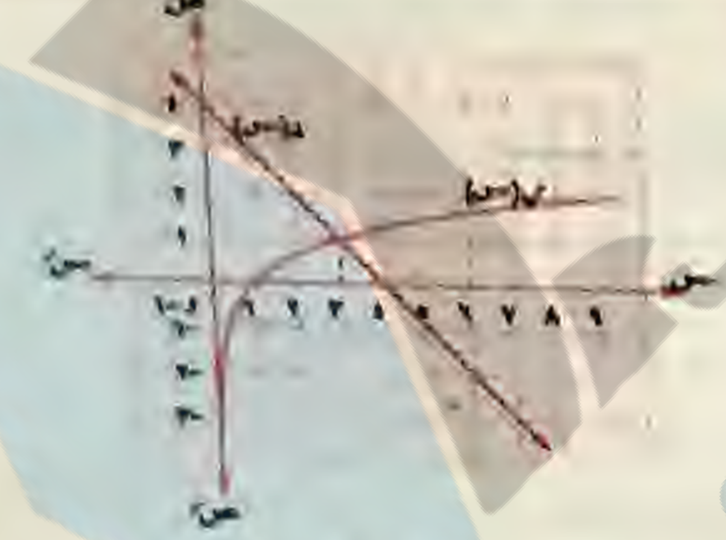
من الرسم :
، المجال =]-∞ ، ٠[
، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

١٨



من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٤}

١٩



من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٣}

٢٠

① (ب) ② (د) ③ (أ) ④ (ب)
⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (د)

إرشادات لحل رقم ٢١

① ∵ د⁻¹ (٥) = ١٤ ∴ د (١٤) = ٥
∴ لو٢ (٢ × ١٤ + ٤) = ٥
∴ ٢ = ٣٢ ∴ ٢ = ٢

② ∵ د⁻¹ (٢ + ٢) = ٣٢
∴ د (٣٢) = ٢ + ٢ ∴ لو ٣٢ = ٢ + ٢
∴ ٢ = ٣٢ ∴ ٢^{٢+١} = ٣٢
∴ ٢ + ٢ = ٥ ∴ ٢ = $\frac{١}{٢}$

③ (د ∘ ر) (١٠) = د (ر (١٠))
= د (٧) = لو ٨ = ٣

④ ∵ لو (س - ٥) > صفر
∴ س - ٥ > ١ ∴ س > ٦

⑤ ∵ لو لو (|س - ١| + ٥) = ١
∴ لو (|س - ١| + ٥) = ٢
∴ (|س - ١| + ٥) = ٨
∴ |س - ١| + ٥ = ±٨
∴ |س - ١| = -١٣ (مرفوض)
أو |س - ١| = ٣
∴ س - ١ = ±٣ ∴ س = ١ ± ٣
∴ س = ٤ أو س = -٢
∴ مجموعة الحل = {-٢ ، ٤}

⑥ ∵ منحنى الدالة يمر بالنقطتين (١١ ، ٣) ، (٤ ، ٠)
∴ د (٤) = صفر ∴ لو٢ (٤ + ب) = صفر
∴ ٤ + ب = ١ ∴ ب = -٣
، د (١١) = ٢ ∴ لو٢ (١١ + ب) = ٣
∴ ١١ + ب = ٢^٣ ∴ ٢^٣ = ٨ ∴ ٢ = ٢
∴ د (س) = لو (س - ٣)
∴ د (٧) = لو (٧ - ٣) = ٢ ، د⁻¹ (٢) = ٧
∴ د (٧) + د⁻¹ (٢) = ٩

⑦ لإيجاد مجال الدالة د (س) = لو |س² - ٩|
نضع |س² - ٩| > ٠
أي أن : |(س - ٣) (س + ٣)| > ٠
س ∈ ح - {٣ ، -٣}
∴ مجال الدالة د = ح - {٣ ، -٣}

⑧ لإيجاد مجال الدالة د (س) = $\frac{\text{لو (س + ٣)}}{\text{س}^2 + ٣\text{س} + ٢}$
= $\frac{\text{لو (س + ٣)}}{\text{(س + ١) (س + ٢)}}$
∴ س + ٣ > ٠ ∴ س > -٣
، س ≠ -١ ، س ≠ -٢
∴ المجال =]-٣ ، ∞[- {-١ ، -٢}

إجابات تمارين 11

① لو ٢ + لو ٥ = لو (٢ × ٥) = لو ١٠ = ١

② $لو_٥ ١٥ - لو_٥ ٣ = لو_٥ \frac{١٥}{٣} = لو_٥ ٥ = ١$

③ $لو_٢ ٥ × لو_٥ ٢ = \frac{لو ٥}{لو ٢} × \frac{لو ٢}{لو ٥} = ١$

④ $لو_٣ ٨١ × لو_٩ ٣ = لو_٣ ٣^٤ × لو_٩ ٩^{\frac{١}{٢}} = ٤ × \frac{١}{٢} = ٢$

⑤ $لو_٢ \frac{١٤ × ١٥}{١٠٥} = لو_٢ ٢ = ١$

⑥ لو ٥٤ - ٣ لو ٣ - لو ٢

$= لو ٥٤ - لو ٢٧ - لو ٢ = لو \frac{٥٤}{٢٧ × ٢} = لو ١ = صفر$

⑦ $لو_٤ لو_٣ لو_٢ ٢^٣ = لو_٤ لو_٣ ٣ = لو_٤ ١ = صفر$

⑧ ١ + لو ٣ - لو ٢ - لو ١٥

$= ١ + لو \left(\frac{٣}{١٥ × ٢}\right) = ١ + لو \frac{١}{١٠}$

$= ١ + لو (١٠)^{-١} = ١ - ١ = صفر$

⑨ $لو ٠,٠٠٠٩ - لو \frac{٢٧}{١٦} + لو ١٥ \frac{٥}{٨} - لو \frac{١}{١٢}$

$= لو \left(٠,٠٠٠٩ × \frac{١٦}{٢٧} × ١٥ \frac{٥}{٨} × ١٢\right)$

= لو ١ = صفر

⑩ $لو_{١٠٠} \frac{٧}{١٧٠} - لو_{١٠٠} \frac{٢٥}{١٨} + لو_{١٠٠} \frac{١٧}{٣٦}$

$= لو_{١٠٠} \left(\frac{٧}{١٧٠} × \frac{١٨}{٢٥} × \frac{١٧}{٣٦}\right)$

$= لو_{١٠٠} \frac{١}{١٠٠} = لو_{١٠٠} (١٠٠)^{-١} = -١$

⑪ $٢ لو ٢٥ + لو \left(\frac{١}{٥} + \frac{١}{٣}\right) + ٢ لو ٣ - لو ٣٠$

$= لو ٦٢٥ + لو \frac{٨}{١٥} + لو ٩ - لو ٣٠$

[illegible]

⑫ $لو ٢٥ + \frac{لو ٨ × لو ١٦}{لو ٦٤} = لو ٢٥ + \frac{٣ لو ٢ × ٤ لو ٢}{٦ لو ٢}$

= لو ٢٥ + ٢ لو ٢

= لو ٢٥ + لو ٤

= لو (٢٥ × ٤)

= لو ١٠٠ = ٢

⑬ $\frac{لو_٢ ٢٥ + لو_٢ ٤}{لو_٢ ٣٠ - لو_٢ ٣} = \frac{لو_٢ (٢٥ × ٤)}{لو_٢ \frac{٣٠}{٣}}$

$= \frac{لو_٢ ١٠٠}{لو_٢ ١٠} = \frac{٢ لو_٢ ١٠}{لو_٢ ١٠} = ٢$

⑭ $\frac{(لو ٢)^٢ - لو ٢^٣}{لو ٣ - لو ١٠٠} = \frac{(لو ٣)^٢ - ٢ لو ٣}{لو ٣ - ٢ لو ١٠}$

$= \frac{لو ٣ (لو ٣ - ٢)}{(لو ٣ - ٢)} = لو ٣$

⑮ $لو_٥ \frac{لو_٢ ٣ - لو_٢ ٥}{لو_٢ \left(\frac{٣}{٥}\right)} = لو_٥ \frac{لو_٢ \frac{٣}{٥}}{لو_٢ \frac{٣}{٥}} = لو_٥ \frac{١}{٥} = -١$

⑯ $لو_٣ \frac{لو س^{١٨}}{لو س^٢} = لو_٣ \frac{١٨ لو س}{٢ لو س} = لو_٣ ٩ = ٢$

⑰ لو$_{٢ب حـ}$ ٢ + لو$_{٢ب حـ}$ ب + لو$_{٢ب حـ}$ حـ

= لو$_{٢ب حـ}$ ٢ب حـ = ١

⑱ $\frac{١}{٢} لو_٢ ٢ + \frac{١}{٢} لو_٢ ب + ٢ لو_٢ حـ$

$- لو_٢ \sqrt{٢ب} - لو_٢ ٣ حـ^٢$

$= لو_٢ ٢^{\frac{١}{٢}} + لو_٢ ب^{\frac{١}{٢}} + لو_٢ حـ^٢ - لو_٢ \sqrt{٢ب}$

$- (لو_٢ ٣ + لو_٢ حـ^٢)$

$= لو_٢ \sqrt{٢} + لو_٢ \sqrt{ب} + لو_٢ حـ^٢ - لو_٢ \sqrt{٢ب}$

$- لو_٢ ٣ - لو_٢ حـ^٢$

$= لو_٢ \sqrt{٢ب} - لو_٢ \sqrt{٢ب} - ١ = -١$

⑲ $\frac{١}{لو_٢ ١٢} + \frac{١}{لو_٨ ١٢} + \frac{١}{لو_٩ ١٢}$

$= لو_{١٢} ٢ + لو_{١٢} ٨ + لو_{١٢} ٩$

$= لو_{١٢} (٢ × ٨ × ٩) = لو_{١٢} ١٤٤ = لو_{١٢} (١٢)^٢$

$= ٢ لو_{١٢} (١٢) = ٢$

---

① الطرف الأيمن $= لو_٣ \frac{٧ × (١٥)^٢}{١٧٥ × ٣} = لو_٣ ٣$

$= لو_٣ \left(\sqrt{٣}\right)^٢ = ٢ لو_٣ \sqrt{٣}$

② الطرف الأيمن $= لو_٢ \frac{٢٩٧ × ٣}{٩٨ × ١١} - ٢ لو_٢ \frac{٩}{٧}$

$= لو_٢ \frac{٤٩ × ٢٩٧ × ٣}{٨١ × ٩٨ × ١١} = لو_٢ \frac{١}{٢} = -١$

③ الطرف الأيمن = (لو ١٠ - لو ٥) (لو ١٠٠ - لو ٢٥)

$= \left(لو \frac{١٠}{٥}\right) \left(لو \frac{١٠٠}{٢٥}\right) = (لو ٢) (لو ٤)$

$= (لو ٢) (٢ لو ٢) = ٢ (لو ٢)^٢$

④ الطرف الأيمن $= \frac{لو ٣^٦ - لو ٢^٦}{لو ٣^٢ - لو ٢^٢} = \frac{٦ لو ٣ - ٦ لو ٢}{٢ لو ٣ - ٢ لو ٢}$

$= \frac{٦ (لو ٣ - لو ٢)}{٢ (لو ٣ - لو ٢)} = ٣$

⑤ الطرف الأيمن $= \frac{(لو ٥)^٢ - ٢ لو ٥}{لو ٥ - ٢}$

$= \frac{(لو ٥)(لو ٥ - ٢)}{لو ٥ - ٢} = لو ٥$

، الطرف الأيسر $= لو ١٠ - لو ٢ = لو \frac{١٠}{٢} = لو ٥$

∴ الطرفان متساويان.

⑥ الطرف الأيمن = [illegible]

⑩ لو ٣ + (س − ١١) لو ٢ = لو ٨ + (٥س − ١) لو ٦

∴ س (لو ٢ − ٥ لو ٦) = لو ٨ − لو ٣ + ١١ لو ٢ − لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو ٨ − لو ٣ + ١١ لو ٢ − لو ٦}}{\text{لو ٢ − ٥ لو ٦}}$ ≃ −٢,٨٢٠

⑪ $٥^{٢س}$ − ٢٧ × $٥^{س}$ + ٥٠ = ٠

∴ ($٥^{س}$ − ٢٥) ($٥^{س}$ − ٢) = ٠

∴ إما $٥^{س}$ = $٥^{٢}$ ∴ س = ٢

أ، $٥^{س}$ = ٢ ∴ س لو ٥ = لو ٢

∴ س = $\frac{\text{لو ٢}}{\text{لو ٥}}$ ≃ ٠,٤٣

∴ س = ٢ أ، ٠,٤٣

⑫ (٣ − ٥ س) لو ٨ − (٤ + س) لو ٧ = لو ٢

∴ س (−٥ لو ٨ − لو ٧) = لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧

∴ س = $\frac{\text{لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧}}{\text{−٥ لو ٨ − لو ٧}}$ ≃ −٠,١٨

⑬ $\text{لو}_{٥}$ ($٤^{س+١}$) = س − ٢

∴ $٤^{س+١}$ = $٥^{س−٢}$

∴ (س + ١) لو ٤ = (س − ٢) لو ٥

∴ س لو ٤ + لو ٤ = س لو ٥ − ٢ لو ٥

∴ س (لو ٤ − لو ٥) = − لو ٤ − ٢ لو ٥

∴ س = $\frac{\text{لو ٤ + ٢ لو ٥}}{\text{لو ٥ − لو ٤}}$ ≃ ٢٠,٦٤

٤

① $\text{لو}_{٣}$ ١٥ = $\text{لو}_{٣}$ ٥ + $\text{لو}_{٣}$ ٣ = ١,٤٦٥ + ١ = ٢,٤٦٥

② $\text{لو}_{٣}$ ١٣٥ = $\text{لو}_{٣}$ ٢٧ + $\text{لو}_{٣}$ ٥ = ٣ $\text{لو}_{٣}$ ٣ + $\text{لو}_{٣}$ ٥

= ٣ + ١,٤٦٥ = ٤,٤٦٥

③ $\text{لو}_{٣}$ $\frac{٥}{٩}$ = $\text{لو}_{٣}$ ٥ − $\text{لو}_{٣}$ ٩ = $\text{لو}_{٣}$ ٥ − ٢ $\text{لو}_{٣}$ ٣

= ١,٤٦٥ − ٢ = −٠,٥٣٥

٥

① لو ٦ = لو ٢ + لو ٣ = س + ص

② $\text{لو}_{١٨}$ ١٢ = $\frac{\text{لو ١٢}}{\text{لو ١٨}}$ = $\frac{\text{لو ٤ + لو ٣}}{\text{لو ٢ + لو ٩}}$

= $\frac{\text{٢ لو ٢ + لو ٣}}{\text{لو ٢ + ٢ لو ٣}}$ = $\frac{\text{٢ س + ص}}{\text{س + ٢ ص}}$

٦

① (✗) والتصحيح : $\text{لو}_{س}$ $س^{س}$ = س

لكل س ∈ $ح^{+}$ − {١}

② (✗) والتصحيح : لو $س^{ن}$ = ن لو س لكل س ∈ $ح^{+}$

③ (✗) والتصحيح : $\text{لو}_{م}$ س ص = $\text{لو}_{م}$ س + $\text{لو}_{م}$ ص

④ (✗) والتصحيح : $\text{لو}_{م}$ س ص = $\text{لو}_{م}$ س + $\text{لو}_{م}$ ص

⑤ (✓)

⑥ (✓) ⑦ (✓)

⑧ (✗) والتصحيح : $\text{لو}_{م}$ $س^{٤}$ = ٤ $\text{لو}_{م}$ |س|

٧

① (أ) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (ب)

⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (ب) ⑨ (د)

٨

① $\text{لو}_{٣}$ (س + ٦) = $\text{لو}_{٣}$ $س^{٢}$ ∴ س + ٦ = $س^{٢}$

∴ $س^{٢}$ − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ م.ح = {٣}

② $\text{لو}_{٤}$ س (س + ٦) = ٣

∴ $٤^{٣}$ = $س^{٢}$ + ٦ س

∴ $س^{٢}$ + ٦ س − ٦٤ = ٠

∴ س = −٣ + $\sqrt{٧٣}$

أ، س = −٣ − $\sqrt{٧٣}$ (مرفوض)

∴ م.ح = {−٣ + $\sqrt{٧٣}$}

③ $\text{لو}_{٣}$ $س^{٢}$ = ٣ ∴ ٣ $\text{لو}_{٣}$ س = ٣

∴ $\text{لو}_{٣}$ س = ١ ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

④ $\text{لو}_{٣}$ (س − ١) (س + ١) = $\text{لو}_{٣}$ ٨

∴ $س^{٢}$ − ١ = ٨

∴ $س^{٢}$ = ٩ ∴ س = ٣

أ، س = −٣ (مرفوض) ∴ م.ح = {٣}

⑤ لو $\frac{\text{س + ٨}}{\text{س − ١}}$ = ١ ∴ $\frac{\text{س + ٨}}{\text{س − ١}}$ = ١٠

∴ ١٠ س − ١٠ = س + ٨

∴ ٩ س = ١٨ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

⑥ $\text{لو}_{٤}$ س = $\text{لو}_{٤}$ ٤ − $\text{لو}_{٤}$ (س − ٣)

∴ $\text{لو}_{٤}$ س = $\text{لو}_{٤}$ $\frac{٤}{\text{س − ٣}}$ ∴ س = $\frac{٤}{\text{س − ٣}}$

∴ $س^{٢}$ − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٤) = ٠

∴ س = −١ (مرفوض) أ، س = ٤

∴ م.ح = {٤}

⑦ $\text{لو}_{٥}$ ٢ $س^{٢}$ = $\text{لو}_{٥}$ ١٨ ∴ ٢ $س^{٢}$ = ١٨

∴ $س^{٢}$ = ٩ ∴ س = ±٣

∴ مجموعة الحل = {٣ ، −٣}

⑧ $\text{لو}_{٣}$ (٧ $س^{٢}$ − ٤) = $\text{لو}_{٣}$ ($س^{٢}$ × ٣)

∴ ٧ $س^{٢}$ − ٤ = ٣ $س^{٢}$ ∴ ٤ $س^{٢}$ = ٤

∴ س = ١ أ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {١}

⑨ $\text{لو}_{٣}$ $\frac{(\text{س + ٢})^{٥}}{(\text{س − ١})^{٥}}$ = $\text{لو}_{٣}$ $٢^{٥}$ ∴ $\frac{\text{س + ٢}}{\text{س − ١}}$ = ٢

∴ س + ٢ = ٢ س − ٢ ∴ س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑩ لو (٨ − س) (س − ٦) = ٠

∴ ١٤ س − $س^{٢}$ − ٤٨ = ١

∴ $س^{٢}$ − ١٤ س + ٤٩ = ٠

∴ $(\text{س − ٧})^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٧

∴ م.ح = {٧}

⑪ لو (س + ٢) (س − ٢) = لو ١٠ − لو ٢

∴ لو ($س^{٢}$ − ٤) = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ $س^{٢}$ − ٤ = ٥ ∴ $س^{٢}$ = ٩

∴ س = ٣ (والسالب مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑫ لو ٧ × لو $٣^{٦}$ = لو $٧^{٢}$ × لو $س^{٣}$

∴ ٦ لو ٧ لو ٣ = ٦ لو ٧ لو س

∴ لو ٣ = لو س ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑬ $\text{لو}_{٢}$ $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ٦ س + ٩}}{\text{س − ١}}$ = $\text{لو}_{٥}$ $٥^{٤}$ = ٤

∴ $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ٦ س + ٩}}{\text{س − ١}}$ = $٢^{٤}$ = ١٦

∴ $س^{٢}$ − ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ $(\text{س − ٥})^{٢}$ = صفر

∴ س = ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥}

⑭ لو س = $\frac{(\text{لو ٣})^{٢}\text{ − ٣ لو ٣}}{\text{لو ٣ − لو ١٠٠٠}}$ = $\frac{\text{لو ٣ (لو ٣ − ٣)}}{\text{لو ٣ − ٣}}$ = لو ٣

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

⑮ $(\text{لو س})^{٢}$ − لو $س^{٢}$ − ٣ = ٠

∴ $(\text{لو س})^{٢}$ − ٢ لو س − ٣ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = −١ أ، لو س = ٣

∴ س = ٠,١ أ، س = ١٠٠٠

∴ م.ح = {٠,١ ، ١٠٠٠}

⑯ $(\text{لو س})^{٢}$ + ٢ لو س + ١ = $(\text{لو ٥})^{٢}$

∴ $(\text{لو س + ١})^{٢}$ = $(\text{لو ٥})^{٢}$

∴ لو س + ١ = ± لو ٥

∴ لو س = لو ٥ − ١ = لو ٥ − لو ١٠ = لو $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ١٠٠٠}

∴ س = ٢٠ ، ٠

∴ مجموعة الحل = {٢٠ ، ٢ ، ٠.٢}

∴ س = ١ / (٢√٢)

∴ مجموعة الحل = {١ / (٢√٢)}

(١٦) لو س / لو ٢ = لو (س + ٦) / لو ٤

∴ لو س / لو ٢ = لو (س + ٦) / ٢ لو ٢

∴ ٢ لو س = لو (س + ٦)

∴ س^٢ = س + ٦ ∴ س^٢ − س − ٦ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٧) لو س / لو ٢ + لو س / لو ٤ = −٣ / ٢

∴ لو س / لو ٢ + لو س / ٢ لو ٢ = −٣ / ٢

∴ ٣ لو س / ٢ لو ٢ = −٣ / ٢ ∴ لو س / لو ٢ = −١

∴ لو س = لو ٢^−١ ∴ س = ١/٢

∴ م.ح = {١/٢}

(١٨) ∵ √(لو٢ س) = لو٢ √س بالتربيع

∴ لو٢ س = لو٢ √س × لو٢ √س

= لو٢ س^(١/٢) × لو٢ س^(١/٢)

∴ لو٢ س = ١/٤ (لو٢ س)^٢

∴ (لو٢ س)^٢ − ٤ لو٢ س = ٠

∴ لو٢ س (لو٢ س − ٤) = ٠

∴ لو٢ س = ٠ أ، لو٢ س = ٤

∴ س = ٢^٠ = ١ أ، س = ٢^٤ = ١٦

∴ م.ح = {١ ، ١٦}

(١٩) بالتربيع للطرفين

∴ س^(لو √س) = ١٠٠ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو √س لو س = ٢

∴ ١/٢ (لو س)^٢ = ٢ ∴ (لو س)^٢ = ٤

∴ لو س = ٢ أ، لو س = −٢

∴ س = ١٠٠ أ، س = ١/١٠٠

∴ م.ح = {١٠٠ ، ١/١٠٠}

(٢٠) √(لو (٩١ + ٣ √(س/٢))) = √٢

∴ لو (٩١ + ٣ √(س/٢)) = ٢

∴ ٩١ + ٣ √(س/٢) = ١٠^٢ = ١٠٠

∴ ٣ √(س/٢) = ٩ = ٣^٢ ∴ √(س/٢) = ٣

∴ س/٢ = ٤ ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

(٢١) لو ١ − لو (٢^س + س − ١) = س (لو ٥ − لو ١٠)

∴ − لو (٢^س + س − ١) = س لو ١/٢

∴ − لو (٢^س + س − ١) = − س لو ٢

∴ لو (٢^س + س − ١) = لو ٢^س

∴ ٢^س + س − ١ = ٢^س

∴ س − ١ = ٠ ∴ س = ١

∴ م.ح = {١}

١٠

(١) (د) (٢) (أ) (٣) (أ) (٤) (د) (٥) (أ)

(٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (د) (٩) (ب)

١١

(١) من هندسة الشكل

لو س / لو ٦ = لو ٤٩ / لو ٧ ∴ لو س / لو ٦ = ٢ لو ٧ / لو ٧

∴ ٢ لو ٦ = لو س ∴ س = ٣٦

(٢) م ء = لو٨١ ٢٤٣ = لو٨١ (٨١)^(٥/٤) = ٥/٤ لو٨١ ٨١ = ٥/٤

، ∵ م ء = ١/٣ أ ء

∴ أ ء = ١٥/٤ ، أ ء = ١/٢ ب جـ

∴ ب جـ = ٢ × ١٥/٤ = ٧.٥ سم

(٣) ∵ ق (∠ أ) = ٩٠° ، أ ء ⊥ جـ ب

∴ (أ جـ)^٢ = جـ ء × جـ ب

∴ (٥ √٣)^٢ = لوس ٢٧ × (لوس ٢٧ + لوس ٣)

∴ ٧٥ = لوس ٢٧ × لوس ٨١

∴ ٧٥ = ٣ لوس ٣ × ٤ لوس ٣

∴ ٧٥ = ١٢ (لوس ٣)^٢

∴ (لوس ٣)^٢ = ٧٥/١٢ = ٢٥/٤

∴ لوس ٣ = ٥/٢ ومنها س^(٥/٢) = ٣

∴ س = ٣^(٢/٥) = ١.٦

أ، لوس ٣ = −٥/٢ ومنها س^(−٥/٢) = ٣

∴ س = (١/٣)^(٢/٥) = ٠.٦

(٤) ∵ أ ء ينصف ∠ أ ∴ جـ أ / أ ب = جـ ء / ء ب

∴ لو٢ ٥ / لو٤ س = لو ب / لو ب^٢ ∴ لو٢ ٥ / لو٤ س = لو ب / ٢ لو ب

∴ ٢ لو٢ ٥ × لو٤ س ∴ لو٢ ٢٥ = لو٤ س

∴ لو ٢٥ / لو ٢ = لو س / لو ٤ ∴ لو ٢٥ / لو ٢ = لو س / ٢ لو ٢

∴ لو س = ٢ لو ٢٥ = لو ٦٢٥

∴ س = ٦٢٥

١٢

(١) ∵ لو ص^٣ = ٣ − لو ١٢٥

∴ لو ص^٣ = لو ١٠٠٠ − لو ١٢٥ = لو ١٠٠٠/١٢٥

∴ ص^٣ = ٨ ∴ ص = ٢

، ∵ لو س ص = ١ − لو ٥ وبالتعويض عن ص = ٢

∴ لو ٢ س = ١ − لو ٥ = لو ١٠ − لو ٥ = لو ٢

∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

(٢) ∵ لو٣ (س ص) + ٢ = ٢ + لو٣ ٩

∴ لو٣ (س ص) = لو٣ ٩ ∴ س ص = ٩

، ∵ س = ١٠ − ص

∴ (١٠ − ص) ص = ٩

∴ ص^٢ − ١٠ ص + ٩ = ٠

∴ (ص − ٩) (ص − ١) = ٠

∴ ص = ٩ ومنها س = ١ أ، ص = ١ ومنها س = ٩

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)}

(٣) ∵ ٣ لو س + ٢ لو ص = ١١ (١)

، ٢ لو س − ٢ لو ص = ٣ (٢)

وبضرب (١) × ٢ ، (٢) × ٢ والجمع

∴ ١٣ لو س = ٣٩ ∴ لو س = ٣

∴ س = ١٠٠٠ وبالتعويض في (١)

∴ ٣ لو ١٠٠٠ + ٢ لو ص = ١١

∴ ٩ + ٢ لو ص = ١١ ∴ لو ص = ١

∴ ص = ١٠

∴ مجموعة الحل = {(١٠٠٠ ، ١٠)}

١٣

(١) الطرف الأيمن = لو٣ (س^٣ × ص^٣) / (س^٢ ص) = لو٣ س^٢ ص^٢

= لو٣ (س ص)^٢ = ٢ لو٣ س ص

= ٢ لو٣ ٩ √٣ = ٢ لو٣ ٣^(٥/٢) = ٥

(٢) ∵ ١/٢ لو أ = ١/٤ لو ب = لو جـ ∴ جـ = √أ

∴ أ = جـ^٢ ، جـ = ب^(١/٤) ∴ ب = جـ^٤

∴ أ ب = جـ^٢ × جـ^٤ = جـ^٦

(٣) ∵ لو $\frac{س + ص}{٣}$ = ½ لو (س ص) = لو (س ص)^{½}

∴ $\frac{س + ص}{٣}$ = (س ص)^{½} وبتربيع الطرفين

∴ س^2 + ص^2 + ٢ س ص = ٩ س ص

∴ س^2 + ص^2 = ٧ س ص

وبالقسمة على س ص : ∴ $\frac{س}{ص}$ + $\frac{ص}{س}$ = ٧

(٤) ∵ ٣$^{لو_أ س}$ = أ وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

∴ لو$_أ$ س لو$_أ$ ٣ = ١

∴ لو$_أ$ س معكوس ضربي للعدد لو$_أ$ ٣

، عندما أ = ٩ ∴ لو$_٩$ س لو$_٩$ ٣ = ١

∴ لو$_٩$ س لو$_٩$ ٩^{½} = ١ ∴ ½ لو$_٩$ س = ١

∴ لو$_٩$ س = ٢

(٥) لو$_{أ^2}$ ب^2 = $\frac{لو ب^2}{لو أ^2}$ = $\frac{٢ لو ب}{٢ لو أ}$ = $\frac{لو ب}{لو أ}$ = لو$_أ$ ب

∴ لو$_{أ^2}$ ب^2 + لو$_أ$ ب^2 = ٢ لو$_أ$ ب + لو$_أ$ ب^2

= ٢ لو$_أ$ ب + ٢ لو$_أ$ ب = ٤ لو$_أ$ ب

(٦) لو $\frac{س^3 ص^3}{س ص}$ = ٢ لو ٦

∴ لو س^2 ص^2 = لو ٣٦ ∴ س^2 ص^2 = ٣٦

∴ س ص = ٦ ∴ س = $\frac{٦}{ص}$

(٧) الطرف الأيمن = ٢ لو (س + ص)

= لو (س + ص)^2

= لو (س^2 + ٢ س ص + ص^2)

= لو (١٠ س ص)

= لو ١٠ + لو س + لو ص

= ١ + لو س + لو ص

(٨) لو (س + ص) = ½ لو (س ص) + لو ٢

∴ لو (س + ص) − لو ٢ = ½ لو (س ص)

∴ لو $\frac{س + ص}{٢}$ = لو (س ص)^{½}

∴ $\frac{س + ص}{٢}$ = س^{½} ص^{½} بالتربيع

∴ س^2 + ص^2 + ٢ س ص = ٤ س ص

∴ س^2 − ٢ س ص + ص^2 = ٠

∴ (س − ص)^2 = ٠ ∴ س − ص = ٠

∴ س = ص

(٩) ∵ لو س ص^2 = ١ ∴ س ص^2 = ١٠

∴ س = $\frac{١٠}{ص^2}$ (١)

، ∵ لو س^2 ص = ١ ∴ س^2 ص = ١٠

ومن معادلة (١) :

∴ $\frac{١٠٠}{ص^4}$ × ص = ١٠ ∴ $\frac{١٠}{ص^3}$ = ١

∴ ص^3 = ١٠ ∴ ص = ١٠^{⅓}

ومن (١) : س = ١٠^{⅓}

∴ لو س ص = لو (١٠^{⅓} × ١٠^{⅓})

= لو ١٠^{⅔} = ⅔ لو ١٠ = ⅔

(١٠) الطرف الأيسر = $\frac{١}{لو_ص س ص}$ = $\frac{١}{\frac{لو س ص}{لو ص}}$ = $\frac{لو ص}{لو س ص}$

= لو$_{س ص}$ ص

لو$_٣$ س + ٣ لو$_س$ ٣ = ٤

بفرض أن لو$_٣$ س = أ

∴ أ + $\frac{٣}{أ}$ = ٤ ∴ أ^2 + ٣ = ٤ أ

∴ أ^2 − ٤ أ + ٣ = ٠

∴ (أ − ١) (أ − ٣) = ٠

∴ أ = ١ أو أ = ٣

∴ لو$_٣$ س = ١ أو لو$_٣$ س = ٣

∴ س = ٣ أو س = ٢٧

∴ م.ح = {٣ ، ٢٧}

(١١) ∵ لو$_س$ ص = $\frac{١}{لو_ص س}$

، ∵ $\frac{٤}{لو_س ص}$ + $\frac{٧}{لو_ع ص}$ = ٣ لو$_ص$ ع

∴ ٤ لو$_ص$ س + ٧ لو$_ص$ ع = ٣ لو$_ص$ ع

∴ س^4 × ع^7 = ع^3

∴ س^4 ع^4 = ١ ∴ س ع = ١

(١٢) ∵ ص = أ$^{لو_٣ س}$

وبأخذ اللوغاريتم للأساس أ للطرفين

∴ لو$_أ$ ص = لو$_٣$ س لو$_أ$ ٣

∴ لو$_٣$ ص = لو$_٣$ س ∴ ص = س

∴ ٣$^{٢ لو_٣ \sqrt{٧}}$ = ٣$^{لو_٣ ٧}$ = ٧

(١٣) لو$_{أ^ص}$ أ^س = $\frac{لو أ^س}{لو أ^ص}$ = $\frac{س لو أ}{ص لو أ}$ = $\frac{س}{ص}$

∴ لو$_{\sqrt[3]{٥}}$ ١٢٥ = لو$_{(٥)^{⅓}}$ (٥)^3 = $\frac{٣}{⅓}$ = ٩

، لو$_{٢٧}$ $\sqrt{٣}$ = لو$_{(٣)^3}$ (٣)^{½} = $\frac{½}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$

∴ لو$_{\sqrt[3]{٥}}$ ١٢٥ × لو$_{٢٧}$ $\sqrt{٣}$ = ٩ × $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$

(١٤) بوضع لو$_ب$ أ = س ∴ ب^س = أ

∴ س لو ب = لو أ ∴ س = $\frac{لو أ}{لو ب}$

∴ لو$_ب$ أ = $\frac{لو أ}{لو ب}$

الطرف الأيمن = $\frac{١}{لو_أ أ + لو_أ ب}$ + $\frac{١}{لو_ب أ + لو_ب ب}$

= $\frac{١}{١ + \frac{لو ب}{لو أ}}$ + $\frac{١}{\frac{لو أ}{لو ب} + ١}$

= $\frac{لو أ}{لو أ + لو ب}$ + $\frac{لو ب}{لو أ + لو ب}$

= $\frac{لو أ + لو ب}{لو أ + لو ب}$ = ١

(١٥) لو $\frac{٤ × أ ب}{(أ + ب)^2}$ = ٠ ∴ $\frac{٤ أ ب}{(أ + ب)^2}$ = ١

∴ (أ + ب)^2 = ٤ أ ب

∴ أ^2 + ٢ أ ب + ب^2 = ٤ أ ب

∴ أ^2 − ٢ أ ب + ب^2 = ٠

∴ (أ − ب)^2 = ٠ ∴ أ − ب = ٠

(١٦) س$^{٢ لو س}$ × س^3 = ١٠^5

∴ لو (س$^{٢ لو س}$ × س^3) = ٥ لو ١٠

∴ لو س$^{٢ لو س}$ + لو س^3 = ٥

∴ ٢ لو س لو س + ٣ لو س = ٥

∴ ٢ (لو س)^2 + ٣ لو س − ٥ = ٠

∴ (٢ لو س + ٥) (لو س − ١) = ٠

∴ لو س = −$\frac{٥}{٢}$ ومنها س = ١٠$^{-\frac{٥}{٢}}$ = $\frac{١}{١٠٠ \sqrt{١٠}}$

أو لو س = ١ ومنها س = ١٠

(١٧) ص − $\frac{١}{ص}$ = ١ ∴ ص^2 − ص − ١ = ٠

∴ ص = $\frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ × ١ × (-١)}}{٢ × ١}$ = $\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ أ^س = $\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ س لو أ = لو $\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ س = لو$_أ$ $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ (ويرفض الحل الآخر)

(١٨) د (س + ١) + د (س − ١) = د (٣)

∴ لو (س + ١)^2 + لو (س − ١)^2 = لو ٣^2

∴ لو (س + ١)^2 (س − ١)^2 = لو ٩

∴ (س^2 − ١)^2 = ٩ ∴ س^2 − ١ = ٣

أو س^2 − ١ = −٣ (مرفوض)

∴ س^2 = ٤ ∴ س = ±٢

∴ م.ح = {٢ ، −٢}

$س^٢ - ١ = -٢$ (مرفوض)

∴ $س^٢ = ٤$ ∴ $س = ±٢$

∴ م.ح = {٢، −٢}

$= \frac{لو أ + لو ب}{لو أ + لو ب} = ١$

(١٩) $د(-س) = لو\left(\sqrt{(-س)^٢ + ١} - (-س)\right)$

$= لو\left(\sqrt{س^٢ + ١} + س\right)$

بالضرب في المرافق

$= لو\left[\left(\sqrt{س^٢ + ١} + س\right) \times \frac{\sqrt{س^٢ + ١} - س}{\sqrt{س^٢ + ١} - س}\right]$

$= لو\left(\frac{س^٢ + ١ - س^٢}{\sqrt{س^٢ + ١} - س}\right)$

$= لو\left(\frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١} - س}\right)$

$= لو\left(\sqrt{س^٢ + ١} - س\right)^{-١}$

$= - لو\left(\sqrt{س^٢ + ١} - س\right) = - د(س)$

∴ $د(-س) = - د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٢٠) $لو ٤^{٤٧} = ٢٨,٣$ ∴ $٢٨ < لو ٤^{٤٧} < ٢٩$

∴ $لو ١٠^{٢٨} < لو ٤^{٤٧} < لو ١٠^{٢٩}$

∴ $١٠^{٢٨} < ٤^{٤٧} < ١٠^{٢٩}$

∴ عدد أرقام العدد $٤^{٤٧}$ = ٢٩ رقمًا

١٤

(١) (أ)	(٢) (د)	(٣) (جـ)	(٤) (د)
(٥) (ب)	(٦) (جـ)	(٧) (جـ)	(٨) (جـ)
(٩) (أ)	(١٠) (د)	(١١) (د)	(١٢) (د)
(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)	

إرشادات لحل رقم ١٤

(١) ∵ لو س = ع + لو ص

∴ لو س − لو ص = ع ∴ $لو \frac{س}{ص} = ع$

∴ $\frac{س}{ص} = (١٠)^ع$

∴ $س = ص \times (١٠)^ع$

(٢) المقدار $= \frac{١}{لو_ب ب + لو_ب أ + لو_ب جـ} + \frac{١}{لو_جـ جـ + لو_جـ أ + لو_جـ ب} + \frac{١}{لو_أ أ + لو_أ ب + لو_أ جـ}$

$= \frac{١}{لو_ب أبجـ} + \frac{١}{لو_جـ أبجـ} + \frac{١}{لو_أ أبجـ}$

$= لو_{أبجـ} ب + لو_{أبجـ} جـ + لو_{أبجـ} أ$

$= لو_{أبجـ} أبجـ = ١$

(٣) ∵ $(٢٥)^س - ١٢ \times (٥)^س + ٢٧ = ٠$

∴ $(٥^س - ٩)(٥^س - ٣) = ٠$

∴ $٥^س - ٩ = ٠$ ومنها $٥^س = ٩$

∴ $س = لو_٥ ٩$

أ، $٥^س - ٣ = ٠$ ومنها $٥^س = ٣$

∴ $س = لو_٥ ٣$

∴ مجموع الجذرين $= لو_٥ ٩ + لو_٥ ٣ = لو_٥ ٢٧$

(٤) بوضع $٣^{لو س} = ص$ (بأخذ لوغاريتم الطرفين)

∴ لو س لو ٣ = لو ص

أي لو ٣ لو س = لو ص

∴ $لو س^{لو ٣} = لو ص$

∴ $س^{لو ٣} = ص$ أي أن $٣^{لو س} = س^{لو ٣}$

(٥) ∵ $لو_جـ لو_ب لو_أ أ^{ب^{جـ}}$

$= لو_جـ لو_ب (ب^{جـ} لو_أ أ) = لو_جـ لو_ب ب^{جـ}$

$= لو_جـ (جـ لو_ب ب) = لو_جـ جـ = ١$

(٦) ∵ $ب^س - ٢ ب^{-س} = ١$

∴ $ب^{٢س} - ب^س - ٢ = ٠$

∴ $(ب^س + ١)(ب^س - ٢) = ٠$

∴ $ب^س = -١$ (مرفوض) أ، $ب^س = ٢$

ومنها $س = لو_ب ٢$

(٧) ∵ $\frac{١}{لو_٢ س} + \frac{١}{لو_٤ س} + \frac{١}{لو_٨ س} + \frac{١}{لو_{١٦} س} = ٥$

∴ $لو_س ٢ + لو_س ٤ + لو_س ٨ + لو_س ١٦ = ٥$

∴ $لو_س (٢ \times ٤ \times ٨ \times ١٦) = ٥$

∴ $لو_س ١٠٢٤ = ٥$

∴ $س^٥ = ١٠٢٤ = (٤)^٥$ ∴ س = ٤

(٨) ∵ لو ١ = صفر ، لو ١٠ = ١

، ∴ لو أ ∈]٠ ، ١[∴ أ ∈]١ ، ١٠[

(٩) برسم منحنى الدالة $د(أ) = لو_٣ أ$

نجد أن إذا كانت أ ∈]٠ ، ٩]

فإن : $لو_٣ أ$ ∈]−∞ ، ٢]

(١٠) ∵ $٣^{لو_٣ (س + ٤)} + ٣^{لو_٣ (س + ٥)} = (٢٥)^{لو_٥ ٧}$

∴ $(س + ٤) + (س + ٥) = ٥^{٢ لو_٥ ٧}$

$= ٥^{لو_٥ ٤٩} = ٤٩$

∴ ٢ س + ٩ = ٤٩ ∴ ٢ س = ٤٠

∴ س = ٢٠ ∴ م.ح = {٢٠}

(١١) ∵ $لو_ص س = لو_س ص$

∴ $لو_ص س = \frac{١}{لو_ص س}$ ∴ $(لو_ص س)^٢ = ١$

∴ $لو_ص س = ±١$

∴ س = ص أ، $س = ص^{-١} = \frac{١}{ص}$

∴ الاجابتين أ ، ب صحيحتين

∴ الاجابة رقم (ء)

(١٢) ∵ $٣^أ = ٥^ب$ ∴ أ لو ٣ = ب لو ٥

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{لو ٥}{لو ٣} = لو_٣ ٥$

، ∵ $٣^أ = ٧^{جـ}$ ∴ أ لو ٣ = جـ لو ٧

∴ $\frac{أ}{جـ} = \frac{لو ٧}{لو ٣} = لو_٣ ٧$

∴ $\frac{أ}{ب} + \frac{أ}{جـ} = لو_٣ ٥ + لو_٣ ٧ = لو_٣ ٣٥$

(١٣) ∵ $لو_٢ س + لو_٤ س + لو_٨ س = ١١$

∴ $\frac{لو س}{لو ٢} + \frac{لو س}{لو ٤} + \frac{لو س}{لو ٨} = ١١$

∴ $\frac{لو س}{لو ٢} + \frac{لو س}{٢ لو ٢} + \frac{لو س}{٣ لو ٢} = ١١$

∴ $\frac{٦ لو س + ٣ لو س + ٢ لو س}{٦ لو ٢} = ١١$

∴ ١١ لو س = ١١ × ٦ لو ٢

∴ $لو س = ٦ لو ٢ = لو ٢^٦ = لو ٦٤$

∴ س = ٦٤

(١٤) ∵ $لو_٢ ٣ \times لو_٣ ٤ \times لو_٤ ٥ \times ... \times لو_ن (ن + ١) = ١٠$

∴ $\frac{لو ٣}{لو ٢} \times \frac{لو ٤}{لو ٣} \times \frac{لو ٥}{لو ٤} \times ... \times \frac{لو (ن + ١)}{لو ن} = ١٠$

∴ لو (ن + ١) = ١٠ لو ٢

∴ $لو (ن + ١) = لو ٢^{١٠}$

∴ ن + ١ = ١٠٢٤ ∴ ن = ١٠٢٣

(١٥) ∵ $د(س) = لو ٢^س$ ∴ د(س) = س لو ٢

∴ د(س) دالة خطية يمثلها خط مستقيم ميله = لو ٢

∴ الإجابة رقم (جـ)

١٥

(١) المقدار $= لو_٣ \left(\frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٩} \times \frac{٩}{٢٧} \times ..... \times \frac{٢٧}{٨١}\right)$

$= لو_٣ \left(\frac{١}{٨١}\right) = لو_٣ ٣^{-٤} = -٤$

(٢) المقدار = لو ظا ١° + لو ظا ٢° + ... + لو ظا ٤٥° + ...

+ لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩°

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظا ٨٨° ظا ٨٩°)

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظتا ٢° ظتا ١°)

= لو ظا ٤٥° = لو ١ = صفر

③ المقدار = لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... × لو ظا ٤٥° × ... × لو ظا ٧٢°
= لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... × لو ١ × ... × لو ظا ٧٢°
= صفر

١٦ ∵ لو$_{س^٢}$ ص^٢ = $\frac{لو ص^٢}{لو س^٢}$ = $\frac{٢ لو ص}{٢ لو س}$ = $\frac{لو ص}{لو س}$ = لو$_س$ ص

∵ لو$_{س^٣}$ ص^٣ = $\frac{لو ص^٣}{لو س^٣}$ = $\frac{٣ لو ص}{٣ لو س}$ = $\frac{لو ص}{لو س}$ = لو$_س$ ص وهكذا

لو$_{س^ن}$ ص^ن = $\frac{لو ص^ن}{لو س^ن}$ = $\frac{ن لو ص}{ن لو س}$ = $\frac{لو ص}{لو س}$ = لو$_س$ ص

∴ لو$_س$ ص + لو$_{س^٢}$ ص^٢ + لو$_{س^٣}$ ص^٣ + ... + لو$_{س^ن}$ ص^ن
= لو$_س$ ص + لو$_س$ ص + لو$_س$ ص + ... + لو$_س$ ص
= ن لو$_س$ ص = لو$_س$ ص^ن

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثانية

١

الزيادة في طول نصف القطر
$= \left(\frac{٣ \times ٣٦ \pi}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}} - \left(\frac{٣ \times \frac{٣٢}{٣} \pi}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$
$= (٢٧)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}} = ١$ وحدة طول.

٢

① ح$_{١٠}$ (مجموع العشرة أعداد الأولى)
$= ٢(٢^{١٠} - ١) = ٢^{١١} - ٢ = ٢٠٤٦$

② ح$_ن$ = ١٣١٠٧٠
∴ $٢(٢^ن - ١) = ١٣١٠٧٠$
∴ $٢^ن - ١ = ٦٥٥٣٥$ ∴ $٢^ن = ٦٥٥٣٦$
∴ $٢^ن = ٢^{١٦}$ ∴ ن = ١٦
عدد الصعود = ١٦ مرة

٣

① د(٠) = ٧٠ - ٤ لو ١ = ٧٠ درجة

② د(٧) = ٧٠ - ٤ لو$_٢$ ٨ = ٥٨ درجة

٤

① د(٠) = ٨٥ - ٢٥ لو ١ = ٨٥٪

② د(٣) = ٨٥ - ٢٥ لو ٤ ≃ ٦٩,٩٥٪

③ د(١٢) = ٨٥ - ٢٥ لو ١٣ ≃ ٥٧,١٥٪

٥

① د(٣٦٠٠) = $\frac{١}{١٠٠}$ × ٣٦٠٠ = ٣٦ جنيهًا.

② د(٨٠٠٠) = $\frac{١}{١٠٠}$ × ٨٠٠٠ + ١٠٠ لو (٨٠٠٠ - ١٩٩٩)
= ١١٤٧,٧٢٦٦ جنيهًا

٦

① الرقم الهيدروجيني = - لو ١٠$^{-٣}$
= ٣ لو ١٠ = ٣

② عندما يكون الرقم الهيدروجيني = ٩
∴ ٩ = - لو (H^+) ∴ لو (H^+) = -٩
∴ $H^+ = ١٠^{-٩}$
أي أن تركيز الهيدروجين = ١٠$^{-٩}$

٧

① أ هو عدد السكان الابتدائي ، ن عدد السنوات
∴ عدد السكان بعد ن سنة = أ $\left(١ + \frac{٧}{١٠٠}\right)^ن$
= أ (١,٠٧)^ن
∴ عدد السكان بعد عام = أ (١,٠٧)

② عندما يتضاعف عدد السكان
∴ ٢أ = أ (١,٠٧)^ن ∴ ٢ = (١,٠٧)^ن
بأخذ اللوغاريتم للطرفين
∴ ن لو ١,٠٧ = لو ٢ ∴ ن ≃ ١٠,٢٤٥ سنوات

٨

٤ = ٣٠ (١,٠٣)$^{٢٠١٠ - ٢٠٠٠}$
① عام ٢٠١٥ يكون عدد السكان
ع = ٣٠ (١,٠٣)$^{٢٠١٥ - ٢٠٠٠}$ ≃ ٤٦,٧٣٩ نسمة
② عندما يصبح عدد السكان ٦٠ مليون نسمة
∴ ٦٠ = ٣٠ (١,٠٣)$^{ن - ٢٠٠٠}$
∴ (١,٠٣)$^{ن - ٢٠٠٠}$ = ٢
بأخذ اللوغاريتم للطرفين
∴ (ن - ٢٠٠٠) لو ١,٠٣ = لو ٢
∴ ن - ٢٠٠٠ ≃ ٢٣ ∴ ن ≃ ٢٠٢٣

٩

① ∵ د = لو $\frac{ش}{ش_٠}$
∴ د = لو $\frac{١٠٠ \times ١٠^{٤} ش_٠}{ش_٠}$ = لو (١٠^٦) = ٦,٢ [illegible]
أي أن الزلزال درجته على مقياس ريختر = ٦,٢

② عندما تكون درجة الزلزال ٨
٨ = لو $\frac{ش}{ش_٠}$ ∴ $\frac{ش}{ش_٠}$ = ١٠^٨
∴ ش = ١٠^٨ ش$_٠$
أي أن شدة الزلزال تعادل ١٠^٨ مرة شدة الزلزال الابتدائية

١٠

∴ [illegible] = [illegible] ١,١ [illegible]
∴ [illegible] = [illegible] $\frac{١}{٢}$ [illegible] ٦,٩ [illegible]
[illegible] بأخذ اللوغاريتم للطرفين
∴ [illegible] لو ٩ = [illegible]
∴ [illegible] ≃ ٦ سنوات

١١

بفرض أن الكمية الابتدائية [illegible]
[illegible] = [illegible] (١ - $\frac{٢٠}{١٠٠}$)^ن
عندما تتوقف [illegible] عن التشغيل
[illegible] = [illegible] (١ - $\frac{٢}{١٠٠}$)^ن
[illegible] بأخذ اللوغاريتم للطرفين
∴ ن لو ٠,٩٨ = [illegible]
∴ ن ≃ ٢٠ سنوات

إجابات تمارين

التفاضل وحساب المثلثات



إجابات الوحدة الثالثة

إجابات تمارين 12

١

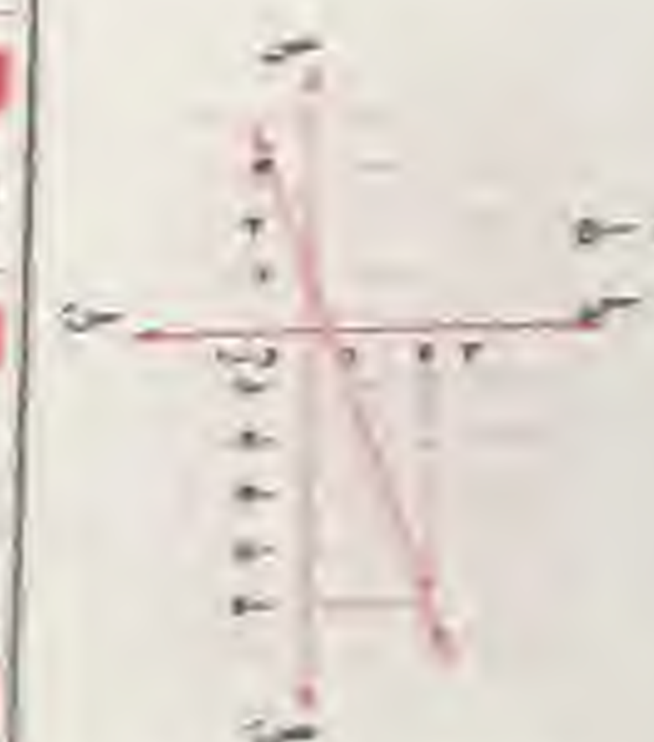
س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)	١٣,٥	١٣,٩٥	١٣,٩٩٥	←	١٤	→	١٤,٠٠٥	١٤,٠٥	١٤,٥

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ١٤

٢

① بيانيًا :

∴ $\lim_{س \to ٢}$ (١ − ٣ س) = −٥



عدديًا :

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)	−٤,٧	−٤,٩٧	−٤,٩٩٧	←	−٥	→	−٥,٠٠٣	−٥,٠٣	−٥,٣

∴ $\lim_{س \to ٢}$ (١ − ٣ س) = −٥

② بيانيًا :

∴ $\lim_{س \to ٠}$ (س^{٢} − ٢)

= −٢



عدديًا :

س	[illegible]	[illegible]	[illegible]	←	٠	→	[illegible]	[illegible]	[illegible]
د(س)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	←	−٢	→	[illegible]	[illegible]	[illegible]

∴ $\lim_{س \to ٠}$ (س^{٢} − ٢) = −٢

٣

① غير معرفة. ② ٣

③ ٠ ④ غير موجودة.

٤

① ١ ② ٢ ③ ١ ④ غير موجودة.

٥

① ٢ ② ١ ③ ١

④ ١ ⑤ ١,٥ ⑥ ١,٥

٦

① ١ ② −١ ③ ٢ ④ غير موجودة.

٧

① ٢ ② ١ ③ ١ ④ ١

٨

① غير معرفة. ② ∞

③ ∞ ④ ∞

٩

① غير معرفة. ② ∞

③ −∞ ④ غير موجودة.

١٠

① ١ ② ١ ③ ٤ ④ غير موجودة.

⑤ غير معرفة. ⑥ ٢ ⑦ ٢ ⑧ ٢

١١

① صفر ② ٣٠

③ غير موجودة. ④ غير موجودة.

١٢

① صفر ② −٢ ③ غير موجودة.

④ −١ ⑤ غير موجودة.

⑥ ١ ⑦ صفر ⑧ غير موجودة.

⑨ صفر ⑩ غير موجودة.

١٣

① ٤ ② غير موجودة.

③ غير موجودة. ④ ٤ ، ٤ ، غير معرفة

⑤ ٢ ⑥ ٢ ⑦ ٢

⑧ ٣ ⑨ ١ ⑩ غير موجودة.

⑪ ٤ ⑫ غير موجودة.

١٤

① (ج) ② (ج) ③ (د) ④ (أ)

⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (ب)

إرشادات لحل رقم ١٤

① لاحظ أن كلًا من الأشكال (أ) ، (ب) ، (د) تحتوي على قفزة عند س = ٣ وبالتالي لا توجد للدالة نهاية عند س = ٣

أما شكل (د) يحتوي على فجوة عند س = ٣ وبالتالي توجد للدالة نهاية عند س = ٣

② عندما س ← ...

∴ طول الوتر $\overline{أب}$ ← طول القطر (٦ ع)

أي أن ع ← ١٠

③ عندما θ ← $\frac{\pi}{٢}$

∴ ع ← ...

أي أن ع ← ...

④ ∵ المنحنى يقطع محور السينات عند س = ٢

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠)

∵ الدالة كثيرة حدود

∴ $\lim$ د(س) = صفر

⑤ ∵ المنحنى يقطع محور الصادات عند ص = ٣

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

∵ الدالة كثيرة حدود

∴ $\lim$ د(س) = ٣

⑥ ∵ $\lim$ د(س)

= $\lim$ د(س) = $\lim$ د(س)

...

⑦ ∵ $\lim$ د(س)

...

إجابات تمارين 13

١

① ... ② ... ③ ... ④ ...

٢

① ...

② ...

③ ...

④ ...

③ نهـا (س ← ٤) [س(س − ٤)(س² + ٤س − ٥)] / (س − ٤)

= نهـا (س ← ٤) س(س² + ٤س − ٥) = ١٠٨

④ نهـا (س ← −٢) [(س + ٢)(٢س² − س + ٢)] / [(س + ٢)(س² − ٢س + ٤)]

= نهـا (س ← −٢) (٢س² − س + ٢) / (س² − ٢س + ٤) = ١٢/١٢ = ١

⑤ نهـا (س ← ٢) (س − ٢)² / [(س − ٣)(س − ٢)²]

= نهـا (س ← ٢) ١ / (س − ٣) = −١/٥

⑥ نهـا (س ← ١) [(س − ١)²(س − ٣)] / [س(س − ١)²]

= نهـا (س ← ١) (س − ٣) / س = −٢

٥

① نهـا (س ← ٩) [(√س − ٣)(√س + ٣)] / [(س − ٩)(√س + ٣)]

= نهـا (س ← ٩) (س − ٩) / [(س − ٩)(√س + ٣)]

= نهـا (س ← ٩) ١ / (√س + ٣) = ١/٦

② نهـا (س ← ٥) [(√(س − ١) − ٢)(√(س − ١) + ٢)] / [(س − ٥)(√(س − ١) + ٢)]

= نهـا (س ← ٥) (س − ١ − ٤) / [(س − ٥)(√(س − ١) + ٢)]

= نهـا (س ← ٥) ١ / (√(س − ١) + ٢) = ١/٤

③ نهـا (س ← −١) (س + ١) / (√(س + ٥) − ٢) × (√(س + ٥) + ٢) / (√(س + ٥) + ٢)

= نهـا (س ← −١) [(س + ١)(√(س + ٥) + ٢)] / (س + ٥ − ٤)

= نهـا (س ← −١) (√(س + ٥) + ٢) = ٤

④ نهـا (س ← ٠) [(√(٢ − ٢س) − √٢)(√(٢ − ٢س) + √٢)] / [س(√(٢ − ٢س) + √٢)]

= نهـا (س ← ٠) (٢ − ٢س − ٢) / (س [√(٢ − ٢س) + √٢])

= نهـا (س ← ٠) −٢ / (√(٢ − ٢س) + √٢) = −١/√٢

⑤ نهـا (س ← ٠) [(√(٢س + ٩) − ٣)(√(٢س + ٩) + ٣)] / [س(س + ١)(√(٢س + ٩) + ٣)]

= نهـا (س ← ٠) (٢س + ٩ − ٩) / [س(س + ١)(√(٢س + ٩) + ٣)]

= نهـا (س ← ٠) ٢ / [(س + ١)(√(٢س + ٩) + ٣)] = ١/٣

⑥ نهـا (س ← ٠) س(س − ٥) / (√(س + ٤) − ٢) × (√(س + ٤) + ٢) / (√(س + ٤) + ٢)

= نهـا (س ← ٠) [س(س − ٥)(√(س + ٤) + ٢)] / (س + ٤ − ٤)

= نهـا (س ← ٠) (س − ٥)(√(س + ٤) + ٢) = −٢٠

⑦ نهـا (س ← ٢) [(س − ٢)(س + ٢)(√(٥س − ٦) + ٢)] / [(√(٥س − ٦) − ٢)(√(٥س − ٦) + ٢)]

= نهـا (س ← ٢) [(س − ٢)(س + ٢)(√(٥س − ٦) + ٢)] / (٥س − ٦ − ٤)

= نهـا (س ← ٢) [(س − ٢)(س + ٢)(√(٥س − ٦) + ٢)] / ٥(س − ٢)

= نهـا (س ← ٢) [(س + ٢)(√(٥س − ٦) + ٢)] / ٥ = ٦

⑧ نهـا (س ← ٠) [(√(١ + س) − √(١ − س))(√(١ + س) + √(١ − س))] / [٢س(√(١ + س) + √(١ − س))]

= نهـا (س ← ٠) (١ + س − ١ + س) / [٢س(√(١ + س) + √(١ − س))]

= نهـا (س ← ٠) ١ / (√(١ + س) + √(١ − س)) = ١/٢

⑨ نهـا (س ← ١) [(س − ١)(√(٢س − ١) + √س)] / [(√(٢س − ١) − √س)(√(٢س − ١) + √س)]

= نهـا (س ← ١) [(س − ١)(√(٢س − ١) + √س)] / (٢س − ١ − س)

= نهـا (س ← ١) [(س − ١)(√(٢س − ١) + √س)] / ٢(س − ١)

= نهـا (س ← ١) (√(٢س − ١) + √س) / ٢ = ١

⑩ نهـا (س ← −١) (√(س² + ٨) − ٣) / (س + ١) × (√(س² + ٨) + ٣) / (√(س² + ٨) + ٣)

= نهـا (س ← −١) (س² + ٨ − ٩) / [(س + ١)(√(س² + ٨) + ٣)]

= نهـا (س ← −١) [(س − ١)(س + ١)] / [(س + ١)(√(س² + ٨) + ٣)]

= نهـا (س ← −١) (س − ١) / (√(س² + ٨) + ٣) = −١/٣

⑪ نهـا (س ← ١) [(١ − س)(٢ + √(س² + ٣))] / [(٢ − √(س² + ٣))(٢ + √(س² + ٣))]

= نهـا (س ← ١) [(١ − س)(٢ + √(س² + ٣))] / (٤ − س² − ٣)

= نهـا (س ← ١) [(١ − س)(٢ + √(س² + ٣))] / [(١ − س)(١ + س)]

= نهـا (س ← ١) (٢ + √(س² + ٣)) / (س + ١) = ٢

⑫ نهـا (س ← ٣) [(√(س + ١) − ٢)(√(س + ١) + ٢)(√(س − ٢) + ١)] / [(√(س − ٢) − ١)(√(س + ١) + ٢)(√(س − ٢) + ١)]

= نهـا (س ← ٣) [(س + ١ − ٤)(√(س − ٢) + ١)] / [(س − ٢ − ١)(√(س + ١) + ٢)]

= نهـا (س ← ٣) (√(س − ٢) + ١) / (√(س + ١) + ٢) = ١/٢

⑬ نهـا [illegible]

= نهـا [illegible]

= نهـا [illegible]

= نهـا [illegible] = ٩ × ٥ / ٤ = [illegible]

⑭ نهـا (س ← ٣) [(س − ٣)(س + √(س + ٦))] / [(س − √(س + ٦))(س + √(س + ٦))]

= نهـا (س ← ٣) [(س − ٣)(س + √(س + ٦))] / (س² − س − ٦)

= نهـا (س ← ٣) [(س − ٣)(س + √(س + ٦))] / [(س − ٣)(س + ٢)]

= نهـا (س ← ٣) (س + √(س + ٦)) / (س + ٢) = ٦/٥

٦ نهـا (س ← ٢) (د(س) − ٥) / (س − ٢) = ١ (النها موجودة)

∴ د(٢) − ٥ = ٠ ∴ د(٢) = ٥

∴ نهـا (س ← ٢) د(س) = د(٢) = ٥

٧ ∵ نهـا (س ← ٠) د(س) / س² = ٥

∴ د(س) = س² (ر(س))

① نهـا (س ← ٠) د(س) = صفر

② نهـا (س ← ٠) د(س) / س = نهـا (س ← ٠) س² (ر(س)) / س

= نهـا (س ← ٠) س (ر(س))

= نهـا (س ← ٠) س × نهـا (س ← ٠) ر(س) = ٠ × ٥ = ٠

■ نهـــا(س ← -١) (س + ١)(س - أ) / (س + ١) = ٤

∴ نهـــا(س ← -١) (س - أ) = ٤

∴ -١ - أ = ٤   ∴ أ = -٥

■ ∵ نهـــا(س ← ١) (س² + أ س + ب) / (س - ١) موجودة وتساوى ٥

، ∵ المقام = صفر عند س = ١

∴ البسط = صفر عند س = ١

∴ ١ + أ + ب = ٠   ∴ ب = -أ - ١

∴ نهـــا(س ← ١) (س² + أ س - أ - ١) / (س - ١) = ٥

∴ نهـــا(س ← ١) ((س² - ١) + (أ س - أ)) / (س - ١) = ٥

∴ نهـــا(س ← ١) ((س - ١)(س + ١) + أ(س - ١)) / (س - ١) = ٥

∴ نهـــا(س ← ١) (س - ١)(س + ١ + أ) / (س - ١) = ٥

∴ ٢ + أ = ٥   ∴ أ = ٣ ومنها ب = -٤

■ نهـــا(س ← ١٠٠) (٠,٢ س² + ٤٠ س + ١٥٠)

= ٦١٥٠ جنيهًا

■

① (أ)   ② (د)   ③ (د)   ④ (أ)

إرشادات لحل رقم ■

① ∵ س (د(س) + ١) = د(س) + س²

∴ س د(س) + س = د(س) + س²

∴ س د(س) - د(س) = س² - س

∴ (س - ١) د(س) = س (س - ١)

∴ د(س) = س (س - ١) / (س - ١) = س

حيث س ≠ ١   ∴ نهـــا(س ← ١) د(س) = ١

② ∵ نهـــا(س ← ٠) (√(م س + ك) - ٣) / س

موجودة وتساوى ٢

، ∵ المقام = صفر عند س = ٠

∴ البسط = ٠ عندما س = ٠

∴ √ك = ٣   ∴ ك = ٩

، ∵ نهـــا(س ← ٠) (√(م س + ٩) - ٣) / س = ٢

∴ نهـــا(س ← ٠) (√(م س + ٩) - ٣) / س × (√(م س + ٩) + ٣) / (√(م س + ٩) + ٣) = ٢

نهـــا(س ← ٠) (م س + ٩ - ٩) / (س (√(م س + ٩) + ٣)) = ٢

∴ نهـــا(س ← ٠) م / (√(م س + ٩) + ٣) = ٢

∴ م / ٦ = ٢   ∴ م = ١٢

∴ م / ك = ١٢ / ٩ = ٤ / ٣

③ ∵ ٢ نهـــا(س ← ٢) د(س)

- ٥ نهـــا(س ← ٢) هـ(س) = ١٠   (١)

، نهـــا(س ← ٢) د(س) + نهـــا(س ← ٢) هـ(س) = ٦   (٢)

وبضرب المعادلة (٢) × ٥

∴ ٥ نهـــا(س ← ٢) د(س)

+ ٥ نهـــا(س ← ٢) هـ(س) = ٣٠   (٣)

بحل (١) ، (٣) :

∴ ٧ نهـــا(س ← ٢) د(س) = ٤٠

∴ نهـــا(س ← ٢) د(س) = ٤٠ / ٧

وبالتعويض فى (٢) :

∴ نهـــا(س ← ٢) هـ(س) = ٦ - ٤٠ / ٧ = ٢ / ٧

∴ نهـــا(س ← ٢) د(س) / هـ(س) = نهـــا د(س) / نهـــا هـ(س) = (٤٠ / ٧) / (٢ / ٧)

= ٢٠

④ نهـــا(س ← ٢) (٢ س² - ل(س)) / (س - ٢)

= نهـــا(س ← ٢) (٢ س² - ل(س) + ٨ - ٨) / (س - ٢)

= نهـــا(س ← ٢) (٢ س² - ٨) / (س - ٢) - نهـــا(س ← ٢) (ل(س) - ٨) / (س - ٢)

= نهـــا(س ← ٢) ٢ (س - ٢)(س + ٢) / (س - ٢)

- نهـــا(س ← ٢) (ل(س) - ٨) / (س - ٢)

= نهـــا(س ← ٢) ٢ (س + ٢) - نهـــا(س ← ٢) (ل(س) - ٨) / (س - ٢)

= ٨ - ٧ = ١

■ ١٣

① نهـــا [(س - ٥)(س + ١) / ((س - ٥)(س - ١))]²

= نهـــا [(س + ١) / (س - ١)]² = (٣ / ٢)² = ٩ / ٤

② نهـــا √((س - ١)(س + ٣) / (س (س - ١)))

= نهـــا √((س + ٣) / س) = √٤ = ٢

③ نهـــا(س ← √٣) (س - √٣)(س + √٣) / ((س - √٣)(س + ٢√٣))

= نهـــا(س ← √٣) (س + √٣) / (س + ٢√٣) = ٢√٣ / ٣√٣ = ٢ / ٣

⑤ [illegible]

⑥ [illegible]

⑦ [illegible]

⑧ [illegible]

إجابات تمارين 14

١

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (أ)

⑤ (ب) ⑥ (د) ⑦ (جـ)

٢

① $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ - ٢^٣}{\text{س} - ٢} = ٣(٢)^٢ = ١٢$

② $\underset{\text{س}\to -٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٤ - (-٥)^٤}{\text{س} - (-٥)} = \frac{٤}{١}(-٥)^{٤-١}$

$= -٥٠٠$

③ $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٥ - \text{أ}^٥}{\text{س} - \text{أ}} = ٥\text{أ}^٤$

④ $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٤ - (-٣)^٤}{\text{س}^٥ - (-٣)^٥} = \frac{٤}{٥}(-٣)^{٤-٥} = \frac{-٤}{١٥}$

⑤ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٦ - (٢)^٦}{\text{س}^٧ - (٢)^٧} = \frac{٦}{٧}(٢)^{٦-٧} = \frac{٣}{٧}$

⑥ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢(\text{س}^٦ - ٦٤)}{\text{س}^٢ - ٤}$

$= ٢\ \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٦ - (٢)^٦}{\text{س}^٢ - (٢)^٢}$

$= ٢ \times \frac{٦}{٢}(٢)^{٦-٢} = ٩٦$

⑦ $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٦ - ٦٤}{٣(\text{س} + ٢)}$

$= \frac{١}{٣}\ \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٦ - (-٢)^٦}{\text{س} - (-٢)}$

$= \frac{١}{٣} \times ٦ \times (-٢)^٥ = -٦٤$

⑧ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}(\text{س}^٩ + ١)}{\text{س}(\text{س}^٦ - ١)}$

$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٩ - (-١)^٩}{\text{س}^٦ - (-١)^٦}$

$= \frac{٩}{٦}(-١)^٣ = -\frac{٣}{٢}$

⑨ $-١ \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٩ - (١)^٩}{\text{س}^٧ - (١)^٧}$

$= -١ \times \frac{٩}{٧}(١)^{٩-٧} = \frac{-٩}{٧}$

⑩ $\underset{٢\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س})^٥ - (-١)^٥}{(٢\text{س})^٦ - (-١)^٦} = \frac{٥}{٦}(-١)^{-١}$

$= -\frac{٥}{٦}$

⑪ $\underset{٣\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(٣\text{س})^٥ - (-٢)^٥}{(٣\text{س})^٣ - (-٢)^٣}$

$= \frac{٥}{٣}(-٢)^{٥-٣} = \frac{٢٠}{٣}$

⑫ $\underset{٢\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}(١٦\text{س}^٤ - ٨١)}{\text{س}^٢(٢\text{س} - ٣)}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} \times \underset{٢\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س})^٤ - (٣)^٤}{٢\text{س} - ٣}$

$= \frac{٢}{٣} \times ٤(٣)^٣ = ٧٢$

٣

① $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٧} - (٢)^{-٧}}{\text{س} - ٢} = -٧(٢)^{-٨} = \frac{-٧}{٢٥٦}$

② $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٤} - (-١)^{-٤}}{\text{س}^{-١٨} - (-١)^{-١٨}} = \frac{-٤}{-١٨}(-١)^{١٤} = \frac{٢}{٩}$

③ $\underset{\text{س}\to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٧ - (\sqrt{٢})^٧}{\text{س}^٢ - (\sqrt{٢})^٢} = \frac{٧}{٢}(\sqrt{٢})^٥$

$= ١٤\sqrt{٢}$

④ $\underset{\text{س}\to -\sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٨ - (-\sqrt{٢})^٨}{\text{س}^٥ - (-\sqrt{٢})^٥} = \frac{٨}{٥}(-\sqrt{٢})^٣$

$= \frac{-١٦\sqrt{٢}}{٥}$

⑤ $\underset{\sqrt{٢}\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{٢}\text{س})^٦ - (-٣)^٦}{\sqrt{٢}\text{س} - (-٣)} = ٦(-٣)^٥$

$= -١٤٥٨$

⑥ $\underset{\text{جا س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٣\text{س} - (\frac{١}{٢})^٣}{\text{جا س} - (\frac{١}{٢})} = ٣(\frac{١}{٢})^٢ = \frac{٣}{٤}$

⑦ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٥} - (٢)^{-٥}}{\text{س}^{-٧} - (٢)^{-٧}} = \frac{٥}{٧}(٢)^٢ = \frac{٢٠}{٧}$

⑧ $٨ \times \underset{\text{س}\to [illegible]}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٣} - (-\frac{١}{٨})}{\text{س}^{-٨} - \frac{١}{٢٥٦}}$

$= ٨ \times \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٣} - (-٢)^{-٣}}{\text{س}^{-٨} - (-٢)^{-٨}}$

$= ٨ \times \frac{-٣}{-٨}(-٢)^٥ = -٩٦$

⑨ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{[illegible]} - (٢)^{[illegible]}}{\text{س} - ٢} = [illegible]$

$= \frac{١}{٦٤}$

⑩ $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٧}{٢}} - ٤^{\frac{٧}{٢}}}{\text{س}^{\frac{٥}{٢}} - ٤^{\frac{٥}{٢}}} = \frac{٧}{٥} \times ٤ = \frac{٢٨}{٥}$

⑪ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{١}{٧}} - ١^{\frac{١}{٧}}}{\text{س} - ١} = \frac{١}{٧}$

⑫ $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - (٤)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{س}^٢ - (٤)^٢} = \frac{٣}{٤}(٤)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٨}$

⑬ $\underset{\text{س}\to ١٦}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٧}{٤}} - ١٦^{\frac{٧}{٤}}}{\text{س} - ١٦} = \frac{\frac{٧}{٤}}{١} \times (١٦)^{\frac{٧}{٤} - ١} = ١٤$

⑭ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٤}} - (١)^{\frac{٣}{٤}}}{\text{س}^٢ - (١)^٢} = \frac{٣}{٨}$

⑮ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}}[\text{س}^{١٠} - ١]}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}[\text{س}^٤ - ١]}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \text{س}^{-١} \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{١٠} - (١)^{١٠}}{\text{س}^٤ - (١)^٤}$

$= ١ \times \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

⑯ $\frac{١}{٢}\ \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٤ - ٢٥٦}{\text{س} - ٤}$

$= \frac{١}{٢}\ \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٤ - ٤^٤}{\text{س} - ٤} = \frac{١}{٢} \times ٤(٤)^٣ = ١٢٨$

⑰ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}^٤}(\text{س}^٩ - ١)}{\frac{١}{\text{س}^٣}(\text{س}^٦ - ١)}$

$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٩ - (-١)^٩}{\text{س}^٦ - (-١)^٦}$

$= -١ \times \frac{٩}{٦}(-١)^٣ = \frac{٣}{٢}$

⑱ $\underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{٣}{[illegible]} \frac{[\text{س}^٤ - ١]}{\text{س} - ١}$

$= \frac{٣}{[illegible]} \underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٤ - (١)^٤}{\text{س} - ١}$

$= \frac{٣}{[illegible]} \times ٤(١)^٣ = [illegible]$

⑲ $\underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{[illegible]}{[illegible]}$

$= \underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س} - ١} \times \underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{[illegible]}{[illegible]}$

$= [illegible]$

⑳ $\underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{[illegible]}{[illegible]}$

$= \underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{١}{[illegible]} \times \underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{[illegible]}{[illegible]}$

$= \frac{١}{٥} \times [illegible] = [illegible]$

٤

① $\underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{[illegible]}{[illegible]}$

$= \frac{[illegible]}{[illegible]}(١)^{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$

② $\underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٥)^{[illegible]} - ١^{[illegible]}}{(\text{س} + ٥) - ١} = ٢(١)^{[illegible]} = ٢$

③ $\underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٣)^{[illegible]} - (١)^{[illegible]}}{(\text{س} + ٣) - (١)} = ٥(١)^٤ = ٥$

④ $\underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٢)^{[illegible]} - ٢^{[illegible]}}{\text{س}} = ٥(٢)^٤ = ٨٠$

⑤ $\frac{١}{٢}\ \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٣ + \text{هـ})^{[illegible]} - ٣^{[illegible]}}{\text{هـ}}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤(٣)^٢ = ١٨$

⑥ $٤\ \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + [illegible])^{[illegible]} - (١)^{[illegible]}}{[illegible]}$

$= ٤\ \underset{[illegible]}{\text{نهـا}} \frac{[illegible]}{[illegible]}$

$= [illegible]$

⑦ $\frac{2}{5}$ نهـــا $\frac{(1-2س)^5 - 1}{2س}$

$= \frac{2}{5}$ نهـــا $\frac{(1-2س)^5 - 1}{(1-2س) - 1}$

$= \frac{2}{5} \times 5 (1)^4 = 2$

⑧ 3 نهـــا $\frac{(س + 2هـ)^5 - س^5}{2هـ}$

$= 3$ نهـــا $\frac{(س + 2هـ)^5 - س^5}{(س + 2هـ) - س}$

$= 3 \times 5 س^4 = 15 س^4$

[illegible]

∴ النهاية موجودة

[illegible]

$\frac{^{٣}(١) - ...}{س - ١}$

× نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{\frac{٢}{٥}} - (١)^{\frac{٢}{٥}}}{س - ١} = \frac{١}{٣} × \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{١٥}$

⑧ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(١ - س)^{١٥} [(\frac{س+١}{س-١})^{١٥} - ١]}{(١ - س)^{٩} [(\frac{س+١}{س-١})^{٩} - ١]}$

= نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $(١ - س)^{٦}$

× نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(\frac{س+١}{س-١})^{١٥} - ١}{(\frac{س+١}{س-١})^{٩} - ١}$

= ١ × نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(\frac{س+١}{س-١})^{١٥} - ١}{(\frac{س+١}{س-١})^{٩} - ١}$

∵ س ← ٠ ∴ $\frac{١ + س}{١ - س}$ ← ١

∴ نهـا$_{(\frac{س+١}{س-١}) \leftarrow ١}$ $\frac{(\frac{س+١}{س-١})^{١٥} - (١)^{١٥}}{(\frac{س+١}{س-١})^{٩} - (١)^{٩}}$

= $\frac{١٥}{٩} (١)^{٦} = \frac{٥}{٣}$

⑨ نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{١٢} - ١}{س^{٢}(س - ١) + (س - ١)}$

= نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{١٢} - ١}{(س - ١)(س^{٢} + ١)}$

= نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{١}{س^{٢} + ١}$ × نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{١٢} - (١)^{١٢}}{س - ١}$

= $\frac{١}{٢} × ١٢ × (١)^{١١} = ٦$

---

①٠

① نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{\frac{١}{٣}}(س - ١)}{س^{\frac{٤}{٣}}(س^{٥} - ١)}$

= نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س - ١}{س^{٥} - ١} = \frac{١}{٥} (١)^{-٤} = \frac{١}{٥}$

② $\frac{٥}{٧}$ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(١ + ٥س)^{١٠} - ١}{٥س}$

× نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{٧س}{(١ + ٧س)^{٨} - ١}$

= $\frac{٥}{٧}$ نهـا$_{(١+٥س) \leftarrow ١}$ $\frac{(١ + ٥س)^{١٠} - (١)^{١٠}}{(١ + ٥س) - (١)}$

× نهـا$_{(١+٧س) \leftarrow ١}$ $\frac{(١ + ٧س) - ١}{(١ + ٧س)^{٨} - (١)^{٨}}$

= $\frac{٥}{٧} × ١٠ (١)^{٩} × \frac{١}{٨} (١)^{-٧} = \frac{٢٥}{٢٨}$

③ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt[٣]{س + ٨} - ٢}{س}$

× نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{س}{(س + ٣)^{٥} - ٢٤٣}$

= نهـا$_{(س+٨) \leftarrow ٨}$ $\frac{(س + ٨)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(س + ٨) - (٨)}$

× نهـا$_{(س+٣) \leftarrow ٣}$ $\frac{(س + ٣) - (٣)}{(س + ٣)^{٥} - (٣)^{٥}}$

= $\frac{١}{٣} (٨)^{-\frac{٢}{٣}} × \frac{١}{٥} (٣)^{-٤} = \frac{١}{٤٨٦٠}$

④ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{\sqrt[٣]{٢س - ٣} - ١}{(٢س - ٤)}$

× نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{٢س - ٤}{\sqrt[٥]{٢س - ٣} - ١}$

= نهـا$_{(٢س-٣) \leftarrow ١}$ $\frac{(٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{(٢س - ٣) - ١}$

× $\frac{٢}{٣}$ نهـا$_{(٢س-٥) \leftarrow -١}$ $\frac{(٢س - ٥) - ١}{(٢س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}$

= $\frac{١}{٣} × \frac{٢}{٣} × ٥ (١)^{\frac{٤}{٥}} = \frac{١٠}{٩}$

⑤ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{(س^{٢} - ٣)^{٥} - ١}{(س - ٢)(س + ٢)} × (س + ٢)$

= نهـا$_{(س^{٢}-٣) \leftarrow ١}$ $\frac{(س^{٢} - ٣)^{٥} - (١)^{٥}}{(س^{٢} - ٣) - ١}$

× نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $(س + ٢) = ٥ (١)^{٤} × ٤ = ٢٠$

⑥ نهـا$_{س \leftarrow -١}$ $\frac{(٤س + ٥)^{٦} - ١ + ٧س + ٧}{س + ١}$

= نهـا$_{س \leftarrow -١}$ $\frac{(٤س + ٥)^{٦} - ١}{س + ١}$

+ نهـا$_{س \leftarrow -١}$ $\frac{٧س + ٧}{س + ١}$

= ٤ نهـا$_{س \leftarrow -١}$ $\frac{(٤س + ٥)^{٦} - ١}{٤س + ٤}$

+ نهـا$_{س \leftarrow -١}$ $٧ (\frac{س + ١}{س + ١})$

= ٤ نهـا$_{(٤س+٥) \leftarrow ١}$ $\frac{(٤س + ٥)^{٦} - (١)^{٦}}{(٤س + ٥) - (١)} + ٧$

= $٤ × ٦ (١)^{٥} + ٧ = ٣١$

⑦ نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{(٥س - ٤)^{١٠} - ١}{س - ١}$

+ نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{٤س - ٤}{س - ١}$

= ٥ نهـا$_{(٥س-٤) \leftarrow ١}$ $\frac{(٥س - ٤)^{١٠} - (١)^{١٠}}{(٥س - ٤) - ١}$

+ نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{٤(س - ١)}{(س - ١)}$

= $٥ × ١٠ (١)^{٩} + ٤ = ٥٤$

⑧ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt[٥]{س + ١} - ١ - \sqrt[٤]{س + ١} + ١}{س}$

= نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt[٥]{س + ١} - ١}{س}$

- نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt[٤]{س + ١} - ١}{س}$

= نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}{س}$

- نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(س + ١)^{\frac{١}{٤}} - (١)^{\frac{١}{٤}}}{س}$

= $\frac{١}{٥} (١)^{-\frac{٤}{٥}} - \frac{١}{٤} (١)^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{-١}{٢٠}$

⑨ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - ١ - (س + ١)^{٧} + ١}{س}$

= نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}{س}$

- نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(س + ١)^{٧} - (١)^{٧}}{س}$

= $\frac{١}{٥} - ٧ = -٦\frac{٤}{٥}$

⑩ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{\sqrt{(س - ١)^{٥}} - ١}{س - ٢}$

+ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{\sqrt[٣]{س - ١} - ١}{س - ٢}$

= نهـا$_{(س-١) \leftarrow ١}$ $\frac{(س - ١)^{\frac{٥}{٢}} - (١)^{\frac{٥}{٢}}}{(س - ١) - (١)}$

+ نهـا$_{(س-١) \leftarrow ١}$ $\frac{(س - ١)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{(س - ١) - (١)}$

= $\frac{٥}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١٧}{٦}$

⑪ نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{٧} - (١)^{٧}}{س - ١}$ + نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{٩} - (١)^{٩}}{س - ١}$

+ نهـا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{١١} - (١)^{١١}}{س - ١} = ٧ + ٩ + ١١ = ٢٧$

⑫ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{س^{٤}(س - ١)^{٦} - س^{٤} + س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

= نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $س^{٤} [\frac{(س - ١)^{٦} - ١}{س - ٢}]$

+ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

= (نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $س^{٤}$)(نهـا$_{(س-١) \leftarrow ١}$ $\frac{(س - ١)^{٦} - (١)^{٦}}{(س - ١) - ١}$)

+ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{س^{٤} - ٢^{٤}}{س - ٢}$

= $١٦ × ٦ (١)^{٥} + ٤ (٢)^{٣} = ١٢٨$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$ | $(٢س^{٢} - ٢س)$ ...

⑭ $\lim_{س\to2} \frac{س^5\sqrt[3]{س+6} - 2س^5 + 2س^5 - 64}{س-2}$

$= \lim_{س\to2} \frac{س^5\left[\sqrt[3]{س+6} - 2\right]}{س-2} + \lim_{س\to2} \frac{2(س^5 - 32)}{س-2}$

$= \left(\lim_{س\to2} س^5\right)\left(\lim_{(س+6)\to8} \frac{(س+6)^{\frac{1}{3}} - (8)^{\frac{1}{3}}}{(س+6) - (8)}\right)$

$+ 2 \lim_{س\to2} \frac{س^5 - 2^5}{س-2}$

$= 2^5 \times \frac{1}{3} \times (8)^{\frac{1}{3}-1} + 2 \times 5 \times 2^{5-1}$

$= 162\frac{2}{3}$

إجابات تمارين 15

١

① بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim_{س\to\infty} \frac{2 - \frac{5}{س}}{3 + \frac{8}{س}} = \frac{2}{3}$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\frac{3}{س} - \frac{5}{س^2}}{3 + \frac{8}{س^2}} = صفر$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim_{س\to\infty} \frac{2س - \frac{5}{س}}{3 + \frac{8}{س}} = \infty$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim_{س\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{س}}{3 - \frac{1}{س}} = \frac{-2}{3}$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س\to\infty} \frac{3 - \frac{6}{س} - \frac{5}{س^2}}{2 + \frac{1}{س} + \frac{4}{س^2}} = \frac{-3}{2}$

⑥ عند س ← ∞ فإن |س| = س

$\therefore \lim_{س\to\infty} \frac{س^2 - 2}{س^2 + 1}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{س^2}}{1 + \frac{1}{س^2}} = 1$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س\to\infty} \frac{4 - \frac{6}{س^2}}{\frac{2}{س^2} - 7} = \frac{4}{-7} = \frac{-4}{7}$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^5$

$\lim_{س\to\infty} \frac{4 + \frac{5}{س^5}}{8 + \frac{1}{س} - \frac{2}{س^5}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^3$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\frac{7}{س} + \frac{1}{س^3}}{4 - \frac{8}{س^2} + \frac{7}{س^3}} = \frac{صفر}{4} = صفر$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^4$

$\lim_{س\to\infty} \frac{5س^2 + \frac{2}{س^2} - \frac{1}{س^4}}{6 + \frac{13}{س^4}} = \frac{\infty}{6} = \infty$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{14}$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\frac{5}{س^{14}} - \frac{7}{س^6} + 3}{\frac{7}{س^{14}} - 6 + \frac{2}{س^8}} = \frac{3}{-6} = \frac{-1}{2}$

⑫ $\lim_{س\to\infty} \left(\frac{7}{س^2} + \frac{2}{س} - 2\right) = -2$

⑬ $\lim_{س\to\infty} \frac{\frac{5}{س^2} + \frac{4}{س^3} - 3}{\frac{7}{س^2} - \frac{2}{س^3} + 8} = \frac{-3}{8}$

⑭ عند س ← −∞ فإن $|2س^3| = -(2س^3)$

$\therefore \lim_{س\to-\infty} \frac{5س^3 - 4س^2 + 2}{7 - س + 8س^3}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^3$

$\lim_{س\to-\infty} \frac{5 - \frac{4}{س} + \frac{2}{س^3}}{\frac{7}{س^3} - \frac{1}{س^2} + 8} = \frac{5}{8}$

⑮ $\lim_{س\to\infty} (س^3 + 5س^2 + 1)$

$= \infty + \infty + 1 = \infty$

⑯ $\lim_{س\to\infty} \left[\sqrt{س^2 + 5س + 7} + س\right]$

$= \sqrt{\infty + \infty + 7} + \infty = \infty$

⑰ $\lim_{س\to\infty} (5 + س - س^2) = 5 + \infty - \infty$ = كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س\to\infty} س^2\left(\frac{5}{س^2} + \frac{1}{س} - 1\right)$

$= \lim_{س\to\infty} س^2 \times \lim_{س\to\infty} \left(\frac{5}{س^2} + \frac{1}{س} - 1\right)$

$= \infty \times -1 = -\infty$

٢

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left(2 + \frac{9}{س}\right)\left(3 + \frac{7}{س}\right)}{\left(1 + \frac{1}{س}\right)\left(5 + \frac{4}{س}\right)} = \frac{2 \times 3}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{س} + \frac{5}{س^2}}{\left(1 + \frac{2}{س}\right)^2} = \frac{3}{1} = 3$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س\to\infty} \frac{6 - \frac{5}{س}}{\left(\frac{3}{س} - 1\right)\left(1 + \frac{2}{س}\right)} = \frac{6}{-1} = -6$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^3$

$\lim_{س\to\infty} \frac{8 - \frac{1}{س^2} + \frac{1}{س^3}}{\left(1 + \frac{1}{س}\right)\left(2 - \frac{3}{س^2}\right)} = \frac{8}{2} = 4$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^3$

$\lim_{س\to\infty} \frac{1 - \frac{4}{س^2} + \frac{5}{س^3}}{\left(2 - \frac{1}{س}\right)^3} = \frac{1}{8}$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{س}\right)\left(4 - \frac{5}{س}\right)}{\left(3 - \frac{8}{س^2}\right)\left(5 - \frac{2}{س}\right)} = \frac{8}{15}$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^3$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{س}\right)\left(5 - \frac{1}{س}\right)\left(1 - \frac{2}{س}\right)}{1 \times \left(1 + \frac{1}{س}\right)\left(2 - \frac{1}{س}\right)} = \frac{-1}{2}$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^2}$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left(\frac{7}{\sqrt{س}} + 1\right)\left(\frac{3}{\sqrt{س}} + 1\right)}{4 - \frac{3}{س}} = \frac{1}{4}$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^3$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left(6 - \frac{5}{س}\right)\left(3 - \frac{4}{س}\right)^2}{\left(3 - \frac{2}{س}\right)^3} = \frac{6 \times 9}{27} = 2$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^5$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{س}\right)^2\left(\frac{3}{س^2} - 2\right)}{3\left(1 + \frac{7}{س}\right)}$

$= \frac{1^2 \times -2}{1 \times 3} = \frac{-2}{3}$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^6 = (س^3)^2$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left(3 - \frac{1}{س^2}\right)^3}{18 + \frac{1}{س^4} + \frac{1}{س^6}} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$

٥

① بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^2}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{2+\frac{3}{س}}{\sqrt{9+\frac{25}{س^2}}} = \frac{2}{3}$$

② بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{س^2}+4}}{1} = \sqrt{4} = 2$$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^2}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{2+\frac{1}{س}}{\sqrt{4+\frac{3}{س}-\frac{4}{س^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt[3]{س^3}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{2-\frac{3}{س}}{\sqrt[3]{125+\frac{5}{س^3}}} = \frac{2}{5}$$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt[3]{س^3}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8+\frac{5}{س^2}-\frac{2}{س^3}}}{3+\frac{2}{س}} = \frac{2}{3}$$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^3 = \sqrt{س^6}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{4}{س^3}-3}{\sqrt{1+\frac{9}{س^6}}} = -3$$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^2} = \sqrt[3]{س^3}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{9-\frac{3}{س}+\frac{8}{س^2}}}{\sqrt[3]{125+\frac{3}{س}+\frac{2}{س^3}}} = \frac{3}{5}$$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س^2} = \sqrt[4]{س^4}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{س^2}}}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{س^4}}} = \frac{1}{1} = 1$$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[3]{س^3} = \sqrt[5]{س^5}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8+\frac{1}{س^3}}}{\sqrt[5]{32+\frac{1}{س^5}}} = \frac{2}{2} = 1$$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[3]{س^3} = \sqrt[4]{س^4}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8+\frac{1}{س^3}}}{\sqrt[4]{1-\frac{3}{س^4}}} = 2$$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[3]{س^3}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{3-\frac{2}{س}}-\sqrt[3]{12+\frac{7}{س}}}{\sqrt[3]{27-\frac{5}{س}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}} = \frac{-1}{3}$$

⑫ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^2}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{7}{س^2}}+2}{2+\frac{9}{س}} = \frac{5}{2}$$

⑬ بقسمة كل من البسط والمقام على

$\sqrt[6]{س^6} = \sqrt[3]{س^3} = \sqrt{س^2}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{8}{س^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{س^7}+\frac{4}{س^3}}}{\sqrt{1+\frac{9}{س^2}}} = 1$$

⑭ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2 = س\sqrt{س^2}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{2-\frac{1}{س}-\frac{7}{س^2}}{\left(1+\frac{1}{س}\right)\sqrt{25+\frac{1}{س^2}}} = \frac{2}{5}$$

٤

① (د)	② (أ)	③ (جـ)
④ (جـ)	⑤ (جـ)	⑥ (جـ)
⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (د)
⑩ (د)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (جـ)	⑭ (جـ)	

٥

① $\lim_{س \to \infty} 7 + \lim_{س \to \infty} \frac{2س^2}{(س+3)^2}$

$$= 7 + \lim_{س \to \infty} \frac{2}{\left(1+\frac{3}{س}\right)^2} = 7+2 = 9$$

② $\lim_{س \to \infty} \frac{س}{2س+1} + \lim_{س \to \infty} \frac{3س^2}{(س-3)^2}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{س}} + \lim_{س \to \infty} \frac{3}{\left(1-\frac{3}{س}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}+3 = \frac{7}{2}$$

③ $\lim_{س \to \infty} \frac{2}{3} - \lim_{س \to \infty} \frac{3س}{2س+7}$

$$= \frac{2}{3} - \lim_{س \to \infty} \frac{3}{2+\frac{7}{س}} = \frac{2}{3}-\frac{3}{2} = \frac{-5}{6}$$

④ $\lim_{س \to \infty} \frac{2س^3-2س^3-س}{2س^2+1}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-س}{2س^2+1}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{-1}{س}}{2+\frac{1}{س^2}} = \frac{صفر}{2} = صفر$$

⑤ $\lim_{س \to \infty} \frac{(س^2-1)(س-2)-(س^2-1)(س+2)}{س^2-4}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^3-2س^2-س+2-س^3-2س^2+س+2}{س^2-4}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-4س^2-2س}{س^2-4}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-4-\frac{2}{س}}{1-\frac{4}{س^2}} = -4$$

⑥

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(\sqrt{س^2-2}-\sqrt{س^2-س}\right)\left(\sqrt{س^2-2}+\sqrt{س^2-س}\right)}{\sqrt{س^2-2}+\sqrt{س^2-س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^2-2-س^2+س}{\sqrt{س^2-2}+\sqrt{س^2-س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س-2}{\sqrt{س^2-2}+\sqrt{س^2-س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{1-\frac{2}{س}}{\sqrt{1-\frac{2}{س^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{س}}} = \frac{1}{2}$$

⑦ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4س^2+1}-\sqrt{س^2+1}}{س}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{س^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{س^2}}}{1} = \frac{2-1}{1} = 1$$

⑧

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(\sqrt{س^2+5س}-س\right)\left(\sqrt{س^2+5س}+س\right)}{\sqrt{س^2+5س}+س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^2+5س-س^2}{\sqrt{س^2+5س}+س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{5س}{\sqrt{س^2+5س}+س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{س}}+1} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$$

⑨ $\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{س\left(\sqrt{٤س^{٢}+١}-٢س\right)\left(\sqrt{٤س^{٢}+١}+٢س\right)}{\left(\sqrt{٤س^{٢}+١}+٢س\right)}$

$= \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{س\left(٤س^{٢}+١-٤س^{٢}\right)}{\left(\sqrt{٤س^{٢}+١}+٢س\right)}$

$= \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{١}{\sqrt{٤+\frac{١}{س^{٢}}}+٢} = \dfrac{١}{٤}$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{١٧} = (س^{٥})(س^{٢})^{٦}$

$= (س^{٧})(س^{٢})^{٥}$

$\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{\left(٢-\frac{١}{س}\right)^{٥}\left(١+\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٦}}{\left(١+\frac{١}{س}\right)^{٧}\left(١-\frac{٥}{س^{٢}}\right)^{٥}}$

$= \dfrac{(٢)^{٥}(١)^{٦}}{(١)^{٧}(١)^{٥}} = ٣٢$

حل آخر :

$\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{\left[س\left(٢-\frac{١}{س}\right)\right]^{٥}\left[س^{٢}\left(١+\frac{٣}{س^{٢}}\right)\right]^{٦}}{\left[س\left(١+\frac{١}{س}\right)\right]^{٧}\left[س^{٢}\left(١-\frac{٥}{س^{٢}}\right)\right]^{٥}}$

$= \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{س^{٥}\left(٢-\frac{١}{س}\right)^{٥}\times س^{١٢}\left(١+\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٦}}{س^{٧}\left(١+\frac{١}{س}\right)^{٧}\times س^{١٠}\left(١-\frac{٥}{س^{٢}}\right)^{٥}}$

$= \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{س^{١٧}\left(٢-\frac{١}{س}\right)^{٥}\left(١+\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٦}}{س^{١٧}\left(١+\frac{١}{س}\right)^{٧}\left(١-\frac{٥}{س^{٢}}\right)^{٥}}$

$= \dfrac{(٢)^{٥}\times(١)^{٦}}{(١)^{٧}\times(١)^{٥}} = ٣٢$

⑪ بضرب كل من البسط والمقام فى مرافق البسط والمقام

$\therefore \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{س+١}-\sqrt{س-١}\right)\left(\sqrt{س+١}+\sqrt{س-١}\right)\left(\sqrt{٤س+١}+\sqrt{٤س-١}\right)}{\left(\sqrt{٤س+١}-\sqrt{٤س-١}\right)\left(\sqrt{٤س+١}+\sqrt{٤س-١}\right)\left(\sqrt{س+١}+\sqrt{س-١}\right)}$

$= \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{(س+١-س+١)\left(\sqrt{٤س+١}+\sqrt{٤س-١}\right)}{(٤س+١-٤س+١)\left(\sqrt{س+١}+\sqrt{س-١}\right)}$

$= \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{\sqrt{٤س+١}+\sqrt{٤س-١}}{\sqrt{س+١}+\sqrt{س-١}}$

ويقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س}$

$\therefore \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{\sqrt{٤+\frac{١}{س}}+\sqrt{٤-\frac{١}{س}}}{\sqrt{١+\frac{١}{س}}+\sqrt{١-\frac{١}{س}}} = \dfrac{٢+٢}{١+١} = ٢$

٦

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$

$\lim\limits_{س\to\infty} \left(\dfrac{٣-\frac{٥}{س}+\frac{١}{س^{٢}}}{٤-\frac{٧}{س^{٢}}}\right)^{\frac{١}{س}} = \left(\dfrac{٣}{٤}\right)^{صفر} = ١$

② $\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{س+١}{\sqrt{س^{٢}-١}} + \lim\limits_{س\to\infty} أ^{\frac{١}{س}}$

$= \lim\limits_{س\to\infty} \left(\dfrac{١+\frac{١}{س}}{\sqrt{١-\frac{١}{س^{٢}}}}\right) + أ^{صفر} = ١ + ١ = ٢$

③ $\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{٢-\frac{٣}{س}}{\sqrt[٣]{٢٧-\frac{١٥}{س^{٢}}+\frac{٢}{س^{٣}}}} + \lim\limits_{س\to\infty} ٨^{\frac{١}{س}}$

$= \dfrac{٢}{٣} + ١ = ١\dfrac{٢}{٣}$

④ $\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{٥}{\frac{١}{س^{٢}}-١} - \lim\limits_{س\to\infty} (١٣)^{\frac{١}{س}}$

$= -٥ - ١ = -٦$

٧

$\because$ النهاية موجودة وتساوى ٣

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام $\therefore ن = ٢$

$\therefore \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{أ٤س^{٢}-٤س+٥}{٣-٩س+٨س^{٢}} = ٣$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$

$\therefore \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{٤أ-\frac{٤}{س}+\frac{٥}{س^{٢}}}{\frac{٣}{س^{٢}}-\frac{٩}{س}+٨} = ٣$

$\therefore \dfrac{٤أ}{٨} = ٣ \qquad \therefore أ = ٦$

٨

$\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{\sqrt[٣]{أ+\frac{٣}{س^{٢}}}}{\sqrt{٤+\frac{٧}{س^{٢}}}} = -١ \qquad \therefore \dfrac{\sqrt[٣]{أ}}{٢} = -١$

$\therefore \sqrt[٣]{أ} = -٢ \qquad \therefore أ = -٨$

٩

$\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{أس^{٢}+٣بس+٥}-٢س\right)}{١} \times \dfrac{\left(\sqrt{أس^{٢}+٣بس+٥}+٢س\right)}{\left(\sqrt{أس^{٢}+٣بس+٥}+٢س\right)}$

$= \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{أس^{٢}+٣بس+٥-٤س^{٢}}{\sqrt{أس^{٢}+٣بس+٥}+٢س} = ٣$

$\because$ اكبر درجة فى المقام هى ١ $\therefore$ درجة البسط = ١

$\therefore أس^{٢} - ٤س^{٢} = ٠ \qquad \therefore أ = ٤$

$\therefore \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{٣بس+٥}{\sqrt{أس^{٢}+٣بس+٥}+٢س} = ٣$

(بقسمة كل من البسط والمقام على س)

$\therefore \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{٣ب+\frac{٥}{س}}{\left(\sqrt{أ+\frac{٣ب}{س}+\frac{٥}{س^{٢}}}+٢\right)} = ٣$

$\therefore \dfrac{٣ب}{\sqrt{أ}+٢} = ٣$

$\therefore ٣ب = ٣ \times (٢+٢) \qquad \therefore ب = ٤$

١٠

$\because \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{٢-أس^{٢}}{٣-بس+س^{٢}} = ٥$

$\therefore \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{\frac{٢}{س^{٢}}-أ}{\frac{٣}{س^{٢}}-\frac{ب}{س}+١} = ٥ \qquad \therefore أ = -٥$

$\because \lim\limits_{س\to -٢} \dfrac{٢+٥س^{٢}}{٣-بس+س^{٢}} = ٢$

$\therefore \dfrac{٢+٥(-٢)^{٢}}{٣+٢ب+(-٢)^{٢}} = ٢ \qquad \therefore ٧+٢ب = ١١$

$\therefore ب = ٢$

١١

$\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{س^{٢}+١-(أس+ب)(س+١)}{س+١} = ٢$

$\therefore \lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{س^{٢}-أس^{٢}-(أ+ب)س+١-ب}{س+١} = ٢$

$\because$ النهاية موجودة وتساوى ٢

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore س^{٢} - أس^{٢} = ٠ \qquad \therefore أ = ١$

، $أ + ب = -٢ \qquad \therefore ب = -٣$

١٢

$\because$ النهاية تساوى ∞

$\therefore$ درجة البسط أكبر من درجة المقام

$\therefore أ + ١ =$ صفر ومنها $أ = -١$

، $٧ - ب =$ صفر ومنها $ب = ٧$

١٣

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$

$\lim\limits_{س\to\infty} \dfrac{٦+\frac{١}{س^{٢}}}{\left(٢+\frac{٣}{س}\right)^{-٢}} = \dfrac{٦}{٢^{-٢}} = ٤$

② $\lim\limits_{\frac{١}{ن}\to صفر} \dfrac{\left(١+\frac{١}{ن}\right)^{٤}-١^{٤}}{\frac{١}{ن}}$

$= \lim\limits_{١+\frac{١}{ن}\to ١} \dfrac{\left(١+\frac{١}{ن}\right)^{٤}-١^{٤}}{\left(١+\frac{١}{ن}\right)-١} = ٤(١)^{٣}$

③ $\lim\limits_{\frac{١}{س}\to صفر} \dfrac{\left(٣+\frac{١}{س}\right)^{٥}-٢٤٣}{\frac{١}{س}}$

$= \lim\limits_{\left(٣+\frac{١}{س}\right)\to ٣} \dfrac{\left(٣+\frac{١}{س}\right)^{٥}-٣^{٥}}{\left(٣+\frac{١}{س}\right)-٣} = ٥(٣)^{٤} = ٤٠٥$

④ بالضرب في المرافق

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(\sqrt{س^2+2}-س)(\sqrt{2س^2+1})(\sqrt{س^2+2}+س)}{\sqrt{س^2+2}+س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س^2+2-س^2)(\sqrt{2س^2+1})}{\sqrt{س^2+2}+س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{2\sqrt{2س^2+1}}{\sqrt{س^2+2}+س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{2\sqrt{2+\frac{1}{س^2}}}{\sqrt{1+\frac{2}{س^2}}+1} = \sqrt{2}$$

⑤ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{2}{س}-\frac{1}{س^2}\right)\sqrt{4س^2+1}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{2\sqrt{4س^2+1}}{س} - \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4س^2+1}}{س^2}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{2\sqrt{4+\frac{1}{س^2}}}{1} - \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{4}{س^2}+\frac{1}{س^4}}}{1}$$

$= 2 \times 2 -$ صفر $= 4$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س\sqrt{س} = \sqrt{س^3}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{5+\frac{16}{\sqrt{س}}-3\sqrt{\frac{1}{س}-\frac{1}{س^3}}}{\frac{1}{\sqrt{س}}+\sqrt{4+\frac{1}{س^3}}} = \frac{5}{2}$$

إجابات تمارين 16

1

① 1 ② صفر ③ صفر ④ $\frac{5}{8}$

⑤ $\frac{3}{5}$ ⑥ 1 ⑦ $\frac{3}{4}$ ⑧ $\frac{3}{4}$

⑨ صفر ⑩ 4 ⑪ صفر ⑫ $\frac{1}{6}$

2

① (أ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (ب)

3

① $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا 2س}{س}}{\frac{ظا 5س}{س}} = \frac{2}{5}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا \frac{س}{5}}{س}}{\frac{ظا \frac{2س}{3}}{س}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{جا 3س}{5س} - \lim_{س \to 0} \frac{جا 2س}{5س}$

$= \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا س}{س}+\frac{ظا س}{س}}{\frac{جا س}{س}} = \frac{1+1}{1} = 2$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا 3س}{س}}{\frac{ظا 2س}{س}} = \frac{3}{2}$

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{س}{5}}{جا س}... - \lim_{س \to 0} \frac{ظا 2س}{س}$

$= 5 - 2 = 3$

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{3+\frac{جا س}{س}}{2+\frac{ظا 3س}{س}} = \frac{3+1}{2+3} = \frac{4}{5}$

⑧ $\lim_{س \to 0} \frac{2\left(\frac{جا س}{س}\right)+4\left(\frac{ظا 2س}{س}\right)}{2+\frac{جا 3س}{س}} = \frac{2+8}{2+3} = 2$

⑨ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا س}{س} - \frac{3 ظا س}{س}}{5 \frac{جا س}{س}} = \frac{1-3}{5} = \frac{-2}{5}$

⑩ $\lim_{س \to 0} \frac{2}{5\left(\frac{ظا س}{س}\right)-2\left(\frac{جا 2س}{س}\right)} = \frac{2}{5-4} = 2$

⑪ بقسمة البسط والمقام على س

$\lim_{س \to 0} \frac{1+جا س}{\frac{جا س}{س} \times جتا س} = \frac{1+1}{1 \times 1} = 2$

⑫ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا 3س}{س} - \frac{جا 4س}{س}}{2} = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}$

⑬ $\lim_{س \to 0} \frac{س + \frac{جا 3س}{س}}{5 جتا 2س} = \frac{3+0}{1 \times 5} = \frac{3}{5}$

⑭ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا 2س + 2 جا س}{س}}{\frac{جا 3س}{س}} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$

⑮ $\lim_{س \to 0} \frac{2 جا \frac{1}{7}س}{س} = \frac{2}{7}$

⑯ $\lim_{س \to 0} \left[\frac{جا \frac{1}{5}س}{س} + \frac{ظا \frac{1}{5}س}{س}\right] = \frac{2}{5}$

⑰ $\lim_{س \to 0} \left(\frac{3 جا 4س}{5س} + 4 جا 4س\right) = \frac{12}{5}$

⑱ $\lim_{(س-3) \to 0} \frac{جا 3(س-3)}{2(س-3)} = \frac{3}{2}$

⑲ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا 24س}{س} \times جتا 6س}{\frac{ظا 6س}{س} \times جتا 24س} = \frac{24 \times 1}{6 \times 1} = 4$

⑳ النهاية $= \frac{\frac{1}{2} جتا (-2 \times \frac{1}{2} + 1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$

㉑ $\lim_{س \to 0} \left[\frac{جا^2 س}{س^2} \times س\right]$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س}{س^2} \times \lim_{س \to 0} س$

$= 1 \times 0 =$ صفر

4

① $\lim_{س \to 0} \frac{1}{5} \times \frac{جا^2 3س}{س^2} = \frac{1}{5} \times 3^2 = \frac{9}{5}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا^2 3س}{س^2}}{\frac{ظا^2 2س}{س^2}} = \lim_{س \to 0} \frac{\left(\frac{جا 3س}{س}\right)^2}{\left(\frac{ظا 2س}{س}\right)^2} = \frac{9}{4}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا^2 \frac{س}{2}}{س^2}}{\frac{ظا^2 2س}{س^2}} = \lim_{س \to 0} \frac{\left(\frac{جا \frac{س}{2}}{س}\right)^2}{\left(\frac{ظا 2س}{س}\right)^2} = \frac{1}{16}$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا 2س}{س}}{\left(\frac{جا س}{س}\right)\left(\frac{ظا 3س}{س}\right)} = \frac{2}{3}$

⑤ $\frac{1}{4} \lim_{س \to 0} \left(\frac{ظا 4س}{س}\right)^2 = \frac{8}{4} = 2$

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا 2س}{س}}{\left(\frac{جا 4س}{س}\right)^2} = \frac{1}{8}$

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا 4س}{س} \times \left(\frac{ظا 5س}{س}\right)^2}{\frac{جا س}{س}} = \frac{25 \times 4}{1} = 100$

⑧ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا 3س}{س}}{1+\left(\frac{جا 3س}{س}\right)^2} = \frac{3}{1+9} = \frac{3}{10}$

⑨ $\lim_{س \to 0} \frac{1+\left(\frac{ظا 2س}{س}\right)^2}{2+\left(\frac{جا 3س}{س}\right)^2} = \frac{1+4}{2+9} = \frac{5}{11}$

⑩ $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا س}{س}}{4-\left(\frac{جا 3س}{س}\right)^2} = \frac{1}{4-9} = \frac{-1}{5}$

⑪ $\lim_{س \to 0} \frac{2س + \frac{جا 5س}{س}}{1-\frac{ظا^2 3س}{س^2}} = \frac{5+0}{1-9} = \frac{-5}{8}$

⑫ $\lim_{س \to 0} \frac{2 + \frac{5 ظا س}{س} + 3\frac{جا س}{س}}{\frac{جا 2س}{س} \times جتا 2س} = \frac{2+5+3}{2 \times 1} = 5$

⑬ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا}\,٢س}{س} + \dfrac{\text{جا}^٢\,٢س}{س^٢}}{\dfrac{\text{ظا}^٢\,٣س}{س^٢} + ١} = \dfrac{٢ + ٤}{٩ + ١} = \dfrac{٦}{١٠} = \dfrac{٣}{٥}$

⑭ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{ظا}\,٣س^٢}{س^٢} + \dfrac{\text{جا}^٢\,٥س}{س^٢} \right) = ٣ + ٢٥ = ٢٨$

⑮ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{جا}\,٥س^٢}{٢س^٢} + \dfrac{\text{ظا}^٣\,٥س}{٢س^٣} \right) = \dfrac{٥}{٢} + \dfrac{١٢٥}{٢} = ٦٥$

⑯ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{٢س + \dfrac{\text{جا}\,٣س}{س}}{٢س + \dfrac{\text{ظا}\,٦س}{س}} \right)^٤ = \left(\dfrac{١}{٢}\right)^٤ = \dfrac{١}{١٦}$

⑰ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{ظا}\,س}{س} \right)^٢ + \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{ظا}\,٣س}{س} \right)^٢$

$+ \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{ظا}\,٥س}{س} \right)^٢ = ١ + ٩ + ٢٥ = ٣٥$

⑱ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}\,س}{س} \times \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{جا}\,٢س}{س} \right)^٢$

$\times \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{جا}\,٤س}{س} \right)^٢ = ١ \times ٤ \times ٦٤ = ٢٥٦$

⑲ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\dfrac{\text{ظا}\,٦س}{س} - \dfrac{\text{جا}(-٣س)}{س}}{\dfrac{\text{جا}\,٥س + \text{جا}\,٢س}{س}} = \dfrac{٦ - (-٣)}{١ + ١} = \dfrac{٩}{٢}$

⑳ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}\,س \left(\sqrt{س+٢} + \sqrt{٢}\right)}{\left(\sqrt{س+٢} - \sqrt{٢}\right)\left(\sqrt{س+٢} + \sqrt{٢}\right)}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}\,س \left(\sqrt{س+٢} + \sqrt{٢}\right)}{س + ٢ - ٢}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}\,س}{س} \times \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\sqrt{س+٢} + \sqrt{٢}\right)$

$= ١ \times ٢\sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$

㉑ $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا}(س - ٣)}{(س - ٣)}$

$\times \underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{١}{س^٢ + ٣س + ٩} = ١ \times \dfrac{١}{٢٧} = \dfrac{١}{٢٧}$

㉒ $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}(س - ١)}{(س - ١)} \times \underset{س \to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{١}{(س + ٢)}$

$= ١ \times \dfrac{١}{٣} = \dfrac{١}{٣}$

٥

① $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{٣\,(١ - \text{جتا}\,س)}{س} = ٣ \times ٠ = ٠$

② $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{-(١ - \text{جتا}\,س)}{س} \times \dfrac{س}{\text{جا}\,س} \right) = ٠ \times ١ = ٠$

③ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\dfrac{١ - \text{جتا}\,س}{س} + \dfrac{\text{جا}\,س}{س}}{\dfrac{١ - \text{جتا}\,س}{س} - \dfrac{\text{جا}\,س}{س}} = \dfrac{٠ + ١}{٠ - ١} = -١$

④ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{١ - \text{جتا}\,٣س}{س} + \dfrac{١ - \text{جتا}\,٤س}{س} \right)$

$= \underset{٣س \to 0}{\text{نهــا}} ٣ \left(\dfrac{١ - \text{جتا}\,٣س}{٣س} \right)$

$+ \underset{٤س \to 0}{\text{نهــا}} ٤ \left(\dfrac{١ - \text{جتا}\,٤س}{٤س} \right) = ٠ + ٠ = ٠$

⑤ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{جا}\,س}{س} \times \dfrac{١ - \text{جتا}\,س}{س} \right) = ١ \times ٠ = ٠$

⑥ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{س\,(١ - \text{جتا}\,س)}{\text{جا}^٢\,٣س}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{س^٢}{\text{جا}^٢\,٣س} \times \dfrac{١ - \text{جتا}\,س}{س} \right)$

$= \dfrac{١}{٩} \times ٠ = \text{صفر}$

⑦ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}^٢\,٣س}{٤س^٢} = \dfrac{٩}{٤}$

⑧ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{٤س^٢}{\text{جا}^٢\,\frac{١}{٢}س} = \dfrac{٤}{\left(\frac{١}{٢}\right)^٢} = ١٦$

⑨ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{٣\,(١ - \text{جتا}\,٤س)}{٨س^٢} = \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{٣\,\text{جا}^٢\,٤س}{٨س^٢}$

$= \dfrac{٣}{٨} \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{جا}\,٤س}{س} \right)^٢ = \dfrac{٣}{٨} \times ١٦ = ٦$

⑩ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا}^٢\,س}{س^٢} = \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{ظا}\,س}{س} \right)^٢ = ١$

⑪ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{١ - \text{جتا}\,س}{س^٢} \times \dfrac{\text{جتا}\,س + ١}{\text{جتا}\,س + ١} \right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{١ - \text{جتا}^٢\,س}{س^٢} \times \dfrac{١}{\text{جتا}\,س + ١} \right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}^٢\,س}{س^٢} \times \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{١}{١ + \text{جتا}\,س}$

$= ١ \times \dfrac{١}{٢} = \dfrac{١}{٢}$

⑫ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{٤\,(١ - \text{جتا}\,س)}{س^٢} \times \dfrac{س^٢}{\text{ظا}^٢\,٣س} \right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{٤\,(١ - \text{جتا}\,س)}{س^٢} \times \dfrac{١ + \text{جتا}\,س}{١ + \text{جتا}\,س} \times \dfrac{س^٢}{\text{ظا}^٢\,٣س} \right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{٤\,\text{جا}^٢\,س}{س^٢} \times \dfrac{١}{١ + \text{جتا}\,س} \times \dfrac{س^٢}{\text{ظا}^٢\,٣س} \right)$

$= ٤ \times ١ \times \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{١}{٩} = \dfrac{٢}{٩}$

⑬ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{١ - \text{جتا}\,٢س}{س^٢} \times \dfrac{١ + \text{جتا}\,٢س}{١ + \text{جتا}\,٢س} \times \dfrac{س}{\text{ظا}\,٢س} \right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{١ - \text{جتا}^٢\,٢س}{س^٢} \times \dfrac{١}{١ + \text{جتا}\,٢س} \times \dfrac{س}{\text{ظا}\,٢س} \right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{جا}^٢\,٢س}{س^٢} \times \dfrac{١}{١ + \text{جتا}\,٢س} \times \dfrac{س}{\text{ظا}\,٢س} \right)$

$= ٤ \times \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{١}{٢} = ١$

⑭ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{١ - \text{جتا}\,٣س}{\text{جا}^٢\,٢س}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{١ - \text{جتا}\,٣س}{\text{جا}^٢\,٢س} \times \dfrac{١ + \text{جتا}\,٣س}{١ + \text{جتا}\,٣س} \right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{جا}^٢\,٣س}{\text{جا}^٢\,٢س} \times \dfrac{١}{١ + \text{جتا}\,٣س} \right)$

$= \dfrac{٩}{٤} \times \dfrac{١}{٢} = \dfrac{٩}{٨}$

٦

① (أ) ② (ج) ③ (أ) ④ (ج)

⑤ (ب) ⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (أ)

٧

① $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا}\,٥س}{\text{ظا}\,٢س} = \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\frac{\text{ظا}\,٥س}{س}}{\frac{\text{ظا}\,٢س}{س}} = \dfrac{٥}{٢}$

② $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} س \left(\dfrac{١}{\text{ظا}\,٢س} - \dfrac{١}{\text{ظا}\,٣س} \right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{س}{\text{ظا}\,٢س} - \dfrac{س}{\text{ظا}\,٣س} \right)$

$= \dfrac{١}{٢} - \dfrac{١}{٣} = \dfrac{١}{٦}$

③ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{٢س\,\text{ظا}\,٢س}{\text{جا}^٢\,٣س} = \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{٢ \left(\frac{\text{ظا}\,٢س}{س}\right)}{\left(\frac{\text{جا}\,٣س}{س}\right)^٢}$

$= \dfrac{٢ \times ٢}{٩} = \dfrac{٤}{٩}$

④ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{٦س^٢}{\text{جا}\,٢س \times \text{ظا}\,س}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \left[٦ \times \left(\dfrac{س}{\text{جا}\,٢س} \right) \times \left(\dfrac{س}{\text{ظا}\,س} \right) \right]$

$= ٦ \times \dfrac{١}{٢} \times ١ = ٣$

⑤ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}\,س}{\text{ظا}\,٤س} = \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\frac{\text{جا}\,س}{س}}{\frac{\text{ظا}\,٤س}{س}} = \dfrac{١}{٤}$

⑥ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{س}{\text{جا}\,س} = ١$

⑦ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{س\,\text{ظا}\,٢س}{\text{جا}^٢\,٣س} = \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\frac{\text{ظا}\,٢س}{س}}{\left(\frac{\text{جا}\,٣س}{س}\right)^٢} = \dfrac{٢}{٩}$

⑧ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right) \times ٢}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right) \times ٤} = \dfrac{٢}{٤} = \dfrac{١}{٢}$

⑨ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا}\,٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}}{\dfrac{\text{ظا}\,٤\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}} = \dfrac{٢}{٤} = \dfrac{١}{٢}$

⑩ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}\,س}{\text{ظا}\,٢س} = \underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\frac{\text{جا}\,س}{س}}{\frac{\text{ظا}\,٢س}{س}} = \dfrac{١}{٢}$

(١١) $\text{نهـا}_{(\pi-س)\to 0} \dfrac{\text{جا}(\pi-س)}{-(\pi-س)} = -1$

(١٢) $\text{نهـا}_{(س+\pi)\to 0} \dfrac{\text{ظا}(س+\pi)}{س+\pi} = 1$

(١٣) $\text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\pi - 2س}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}$

$= \text{نهـا}_{\frac{\pi}{2}-س\to 0} \dfrac{2\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}{-\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-س\right)} = -2$

(١٤) $\text{نهـا}_{(س-\frac{\pi}{2})\to 0} \dfrac{\text{ظا}\left(س-\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(س-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

(١٥) $\text{نهـا}_{س\to 1} \dfrac{\text{جا}(\pi - \pi س)}{1-س}$

$= \text{نهـا}_{(1-س)\to 0} \dfrac{\text{جا}\,\pi(1-س)}{1-س} = \pi$

(١٦) $\text{نهـا}_{(س+1)\to 0} \dfrac{1+س}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}س\right)}$

$= \text{نهـا}_{(س+1)\to 0} \dfrac{(1+س)}{\text{جا}\left[\frac{\pi}{2}(1+س)\right]} = \frac{2}{\pi}$

(١٧) $\text{نهـا}_{س\to 1} (1-س)\,\text{ظا}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}س\right)$

$= \text{نهـا}_{(1-س)\to 0} \dfrac{(1-س)}{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{2}(1-س)\right)} = \frac{2}{\pi}$

٨

(١) $\text{نهـا}_{س\to 0} \dfrac{\text{جا}س}{س} = 1$

(٢) $\text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}س}{س} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

(٣) $\text{نهـا}_{س\to\pi} \dfrac{\text{جا}س}{س} = \dfrac{\text{صفر}}{\pi} = \text{صفر}$

٩

(١) $\text{نهـا}_{س\to 5} \dfrac{\text{جا}(س-5)}{(س-5)(س+5)} = \text{نهـا}_{س\to 5} \dfrac{1}{س+5}$

$\times \text{نهـا}_{(س-5)\to 0} \dfrac{\text{جا}(س-5)}{س-5} = \frac{1}{10} \times 1 = \frac{1}{10}$

(٢) $\text{نهـا}_{(س-5)\to 0} \left[\dfrac{\text{جا}(س-5)}{(س-5)}\right]^2 = (1)^2 = 1$

(٣) $\text{نهـا}_{س\to 5} \left[(س-5)\times\dfrac{\text{جا}(س-5)^2}{(س-5)^2}\right]$

$= \text{نهـا}_{س\to 5}(س-5)\times \text{نهـا}_{(س-5)^2\to 0} \dfrac{\text{جا}(س-5)^2}{(س-5)^2}$

$= \text{صفر}\times 1 = \text{صفر}$

١٠

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (جـ) (٥) (ب)

إرشادات لحل رقم ١٠

(١) يمكننا باستخدام تجريب قيم م المعطاة استنتاج أن النهاية = ١ عندما م = ٣

(٢) $\text{نهـا}_{س\to 0} س\,\text{قا}\left(\frac{\pi}{2}+س\right) = \text{نهـا}_{س\to 0} (-س\,\text{قتا}س)$

$= \text{نهـا}_{س\to 0} \dfrac{-س}{\text{جا}س} = -1$

(٣) $\text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\text{ظا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س}$ بالضرب × جتا س بسطًا ومقامًا

$= \text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{(\text{جتا}س-\text{جا}س)}{\text{جتا}س\,(\text{جا}س-\text{جتا}س)}$

$= \text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{-1}{\text{جتا}س} = -\sqrt{2}$

(٤) $\text{نهـا}_{س\to\sqrt{\pi}} \dfrac{\text{جا}(س^2-5)}{\text{ظا}(\pi س^2)}$

$= \text{نهـا}_{س\to\sqrt{\pi}} \dfrac{\text{جا}(س^2-5)}{-\text{ظا}(\pi-س^2)}$

$= \text{نهـا}_{س\to\sqrt{\pi}} \dfrac{\text{جا}(س^2-5)}{-\text{ظا}(5\pi-\pi س^2)}$

$= \text{نهـا}_{س\to\sqrt{\pi}} \dfrac{\text{جا}(س^2-5)}{\text{ظا}\,\pi(س^2-5)} = \frac{1}{\pi}$

(٥) بقسمة كل من البسط والمقام على س:

$\therefore \text{نهـا}_{س\to 0} \dfrac{\frac{\text{جا}س}{س}+\frac{\text{جا}2س}{س}+\frac{\text{جا}3س}{س}+\dots+\frac{\text{جا}ن س}{س}}{\frac{\text{ظا}س}{س}+\frac{\text{ظا}2س}{س}+\frac{\text{ظا}3س}{س}+\dots+\frac{\text{ظا}ن س}{س}}$

$= 1$

١١

(١) بالقسمة بسطًا ومقامًا على ظا² س

$\text{نهـا}_{\text{ظا}س\to\infty} \dfrac{3-4\,\text{ظا}س+7\,\text{ظا}^2س}{5\,\text{ظا}^2س+2} = \frac{7}{5}$

(٢) $\text{نهـا}_{س\to -1} \dfrac{\text{جا}[(س+1)(س-2)]}{س+1}$

$= \text{نهـا}_{(س+1)(س-2)\to 0} \dfrac{\text{جا}[(س+1)(س-2)]}{(س+1)(س-2)}$

$\times \text{نهـا}_{س\to -1}(س-2) = 1\times(-3) = -3$

(٣) $\because س\to\infty \quad \therefore \frac{1}{س}\to 0$

$\therefore \text{نهـا}_{\frac{1}{س}\to 0} \dfrac{\text{ظا}\frac{4}{س}+\text{جا}\frac{3}{س}}{\frac{1}{س}}$

$= \text{نهـا}_{\frac{1}{س}\to 0} \left[\dfrac{\text{ظا}\frac{4}{س}}{\frac{1}{س}}+\dfrac{\text{جا}\frac{3}{س}}{\frac{1}{س}}\right] = 4+3 = 7$

(٤) $\text{نهـا}_{\text{جا}س\to 0} \frac{1}{5}\times\left[\dfrac{\text{جا}(\text{جا}س)}{(\text{جا}س)}\right] = \frac{1}{5}$

(٥) $\text{نهـا}_{1-\text{جتا}س\to 0} \dfrac{\text{جا}(1-\text{جتا}س)}{(1-\text{جتا}س)} = 1$

(٦) $\text{نهـا}_{س\to 0} \left(\dfrac{\text{ظا}(\text{ظا}5س)}{\text{ظا}5س}\times\dfrac{\text{ظا}5س}{4س}\right)$

$= \text{نهـا}_{\text{ظا}5س\to 0} \dfrac{\text{ظا}(\text{ظا}5س)}{\text{ظا}5س}\times \text{نهـا}_{س\to 0} \dfrac{\text{ظا}5س}{4س}$

$= 1\times\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

(٧) $\text{نهـا}_{س\to 0} \left(\dfrac{2\,\text{ظا}س}{س}\times\dfrac{1}{1+\text{ظا}^2س}\right) = 2\times\dfrac{1}{1+0} = 2$

(٨) $\text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\text{ظا}(\text{جتا}س)}{\text{جتا}س}\times\dfrac{\text{جتا}س}{2س-\pi}\right)$

$= \text{نهـا}_{\text{جتا}س\to 0} \dfrac{\text{ظا}(\text{جتا}س)}{\text{جتا}س}\times \text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}{-2\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}$

$= 1\times -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

(٩) $\text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\text{جا}س)(1+\text{جا}س)}{(2س-\pi)(1+\text{جا}س)}$

$= \text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جتا}^2س}{-2\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}\times\dfrac{1}{1+\text{جا}س}$

$= \text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}^2\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}{-2\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}\times\dfrac{\frac{\pi}{2}-س}{1+\text{جا}س}$

$= -\frac{1}{2}\times\text{صفر} = \text{صفر}$

(١٠) $\text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2}-س}{\text{ظا}2\left(\frac{\pi}{2}-س\right)} = \frac{1}{2}$

(١١) $\text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}{-\text{ظا}\left(\frac{3\pi}{2}-3س\right)}$

$= \text{نهـا}_{س\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}\times\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}{-\text{ظا}3\left(\frac{\pi}{2}-س\right)}$

$= 1\times -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

إجابات تمارين 17

١

$\text{نهـا}_{س\to 3^-} د(س) = (3)^2 + 1 = 10$

$\text{نهـا}_{س\to 3^+} د(س) = 3(3)+1 = 10$

$\because د(3) = 10$

$\therefore \text{نهـا}_{س\to 3} د(س) = 10$

$(٢^+) = \underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٢ \times ٢ - ٧ = -١$

$(٢^-) = \underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٢)} = -١$

$(٢) = \text{د}(٢^-) = -١ \quad \therefore \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = -١$

٣

$(٠^-) = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٢$

$(٠^+) = \underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ١$

$\text{د}(٠^-) \neq \text{د}(٠^+)$

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

٤

$\text{د}(٠^-) = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ١$

$\text{د}(٠^+) = \underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نهــا}}\ \frac{٥\text{س} + \text{ظا}\,٢\text{س}}{٦\text{س} + \text{جا}\,\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نهــا}}\ \frac{٥ + \frac{\text{ظا}\,٢\text{س}}{\text{س}}}{٦ + \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}} = \frac{٥ + ٢}{٦ + ١} = ١$

$\because \text{د}(٠^+) = \text{د}(٠^-) = ١ \quad \therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ١$

٥

① $\underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٠ - ٢ = -٢$

$\underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٠^٢ = ٠$

$\because \text{د}(٠^-) \neq \text{د}(٠^+)$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

② $\text{د}(١^-) = \text{د}(١^+) = ١^٤ = ١$ (لها نفس التعريف)

$\therefore \underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ١$

③ $\text{د}(٢^-) = \underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نهــا}}\ \text{س}^٢ = ٤$

$\text{د}(٢^+) = \underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نهــا}}\ ٢\text{س} = ٤$

$\because \text{د}(٢^-) = \text{د}(٢^+) = ٤$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٤$

٦

$\text{د}(٢^-) = \text{د}(٢^+) = $ صفر

$\therefore \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = $ صفر

٧

$\text{د}(٠^+) = \underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نهــا}}\ \left(\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ١} - ١} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ١} + ١}{\sqrt{\text{س} + ١} + ١}\right)$

$= \underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}\left(\sqrt{\text{س} + ١} + ١\right)}{\text{س} + ١ - ١}$

$= \underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نهــا}}\ \left(\sqrt{\text{س} + ١} + ١\right) = ٢$

$\text{د}(٠^-) = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهــا}}\ \frac{٢\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}} = ٢$

$\because \text{د}(٠^+) = \text{د}(٠^-) \quad \therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٢$

٨

$\text{د}(٤^+) = \underset{\text{س} \to ٤^+}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{س} - ٣)^٦ - ١}{\text{س} - ٤}$

$= \underset{(\text{س} - ٣) \to ١^+}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{س} - ٣)^٦ - ١^٦}{(\text{س} - ٣) - ١} = ٦$

$\text{د}(٤^-) = \underset{\text{س} \to ٤^-}{\text{نهــا}}\ (\text{س} + ٢) = ٦$

$\because \text{د}(٤^+) = \text{د}(٤^-) \quad \therefore \underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٦$

٩

$\because \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٧$

$\therefore \text{د}(٢^-) = \text{د}(٢^+) = ٧$

$\because \text{د}(٢^-) = ٤ + ٢\text{م} = ٧ \quad \therefore \text{م} = ١$

$\because \text{د}(٢^+) = ١٠ + \text{ك} = ٧ \quad \therefore \text{ك} = -٣$

١٠

$\because \text{د}(٠^-) = \text{د}(٠^+) = ٢ \quad \therefore \text{د}(٠^-) = \text{أ} = ٢$

١١

$\because \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهــا}}\ |٣\text{س} + ٢| = ١٤$

$\therefore |٣\text{أ} + ٢| = ١٤$

$\therefore ٣\text{أ} + ٢ = ١٤ \quad \therefore \text{أ} = ٤$

$\text{أو } ٣\text{أ} + ٢ = -١٤ \quad \therefore \text{أ} = \frac{-١٦}{٣}$

١٢

① $\text{د}\left(\frac{-\pi}{٢}^+\right) = \underset{\text{س} \to \left(\frac{-\pi}{٢}\right)^+}{\text{نهــا}}\ \frac{٢\text{س}}{\text{ظا}\,\text{س}} = \frac{-\pi}{-\sqrt{٢}} = \frac{\pi}{\sqrt{٢}}$

، $\text{د}\left(\frac{-\pi}{٢}^-\right)$ غير موجودة

$\therefore \underset{\text{س} \to \frac{-\pi}{٢}}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

② $\text{د}\left(\frac{\pi}{٢}^-\right) = ٢\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٢} = ٢$

، $\text{د}\left(\frac{\pi}{٢}^+\right)$ غير موجودة.

$\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

③ $\text{د}(٠^-) = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهــا}}\ \frac{٢\text{س}}{\text{ظا}\,\text{س}} = ٢$

، $\text{د}(٠^+) = ٢$

$\because \text{د}(٠^-) = \text{د}(٠^+) = ٢ \quad \therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٢$

١٣

$\because \text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ + \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}}{\text{س} - ٣}$

$= \text{س}^٢ + \frac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & \text{، س} > ٣ \\ \text{س}^٢ - ١ & \text{، س} < ٣ \end{cases}$

$\text{د}(٣^+) = \underset{\text{س} \to ٣^+}{\text{نهــا}}\ (\text{س}^٢ + ١) = ١٠$

$\text{د}(٣^-) = \underset{\text{س} \to ٣^-}{\text{نهــا}}\ (\text{س}^٢ - ١) = ٨$

، $\because \text{د}(٣^+) \neq \text{د}(٣^-)$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

١٤

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٢|\text{س}|}{\text{س}}$

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\text{س}} & \text{، س} > ٠ \\ \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}{\text{س}} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{\text{س}(\text{س} + ٢)}{\text{س}} & \text{، س} > ٠ \\ \frac{\text{س}(\text{س} - ٢)}{\text{س}} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \text{س} + ٢ & \text{، س} > ٠ \\ \text{س} - ٢ & \text{، س} < ٠ \end{cases}$

$\text{د}(٠^-) = ٠ - ٢ = -٢$

$\text{د}(٠^+) = ٠ + ٢ = ٢$

$\because \text{د}(٠^-) \neq \text{د}(٠^+) \quad \therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

١٥

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س}^٢ + ٢ & \text{، س} < ٠ \\ ٢ & \text{، س} > ٠ \end{cases}$

$\text{د}(٠^-) = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهــا}}\ (-\text{س}^٢ + ٢) = ٢$

$\text{د}(٠^+) = ٢$

$\because \text{د}(٠^-) = \text{د}(٠^+) \quad \therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٢$

١٦

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{(\text{س} - ١)^٢}{-(\text{س} - ١)} & \text{، س} < ١ \\ ٦\text{س} - ٢\text{م} & \text{، س} > ١ \end{cases}$

$= \begin{cases} -(\text{س} - ١) & \text{، س} < ١ \\ ٦\text{س} - ٢\text{م} & \text{، س} > ١ \end{cases}$

$\because \underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ لها وجود عند س = ١

$\therefore \text{د}(١^-) = \text{د}(١^+)$

$\therefore -(١ - ١) = ٦(١) - ٢\text{م}$

$\therefore \text{م} = ٣$

١٨

د(π⁻) = نهــا_{س ← π⁻} (٢ جا س)/(س − π)

= نهــا_{س ← π⁻} (٢ جا (π − س))/(س − π) = ٢

، د(π⁺) = نهــا_{س ← π⁺} (١ − جتا س) = ٢

، ∵ د(π⁺) = د(π⁻) ∴ نهــا_{س ← π} د(س) = ٢

١٩

① أولاً : (ب) ثانياً : (أ) ثالثاً : (د)

② (جـ) ③ (ب) ④ (ب) ⑤ (أ)

⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (ب) ⑨ (ب)

⑩ (د) ⑪ (أ) ⑫ (د) ⑬ (ب)

⑭ (أ) ⑮ (أ) ⑯ (جـ) ⑰ (جـ)

⑱ (د)

٢٠

(د + ر)(س) = { س² − ٢س + ٢ ، س ≥ ١ ؛ ٢س² − ٥س + ٤ ، س < ١ }

(د + ر)(١⁺) = نهــا_{س ← ١⁺} (س² − ٢س + ٢) = ١

(د + ر)(١⁻) = نهــا_{س ← ١⁻} (٢س² − ٥س + ٤) = ١

∵ (د + ر)(١⁺) = (د + ر)(١⁻)

∴ نهــا_{س ← ١} [د(س) + ر(س)] = ١

٢١

∵ نهــا_{س ← −١} د(س) موجودة

∴ د(−١⁻) = د(−١⁺)

٣(−١) − ٢ = −أ + ب ∴ أ − ب = ٥ (١)

∵ نهــا_{س ← ٢} د(س) موجودة ∴ د(٢⁻) = د(٢⁺)

٢أ + ب = ٦ − ٣ ∴ ٢أ + ب = ٣ (٢)

∴ أ = ٢ ومنها ب = −٣

٢٢

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٠

∴ د(٠⁺) = د(٠⁻)

∴ نهــا_{س ← ٠⁺} (أس)/(√(س + ٤) − ٢) = نهــا_{س ← ٠⁻} (جا ٣س)/(أس)

∴ نهــا_{س ← ٠⁺} ((أس)/(√(س + ٤) − ٢) × (√(س + ٤) + ٢)/(√(س + ٤) + ٢)) = ٣/أ

∴ نهــا_{س ← ٠⁺} (أس(√(س + ٤) + ٢))/س = ٣/أ

∴ ٤أ = ٣/أ ∴ ٤أ² = ٣ ∴ أ = ± √٣/٢

٢٣

① د(٥⁺) = نهــا_{س ← ٥⁺} √(س − ٥) = صفر

د(٥⁻) غير موجودة

∴ نهــا_{س ← ٥} د(س) غير موجودة

② د(٣⁺) غير موجودة

د(٣⁻) = نهــا_{س ← ٣⁻} √(٣ − س) = صفر

∴ نهــا_{س ← ٣} د(س) غير موجودة

③ د(−١⁺) غير موجودة

د(−١⁻) = نهــا_{س ← (−١)⁻} √(س² − ١) = صفر

∴ نهــا_{س ← −١} د(س) غير موجودة

د(١⁺) = نهــا_{س ← ١⁺} √(س² − ١) = صفر

د(١⁻) غير موجودة

∴ نهــا_{س ← ١} د(س) غير موجودة

④ د(−٢⁻) غير موجودة

د(−٢⁺) = نهــا_{س ← (−٢)⁺} √(٤ − س²) = صفر

∴ نهــا_{س ← −٢} د(س) غير موجودة

، د(٢⁺) غير موجودة

، د(٢⁻) = نهــا_{س ← ٢⁻} √(٤ − س²) = صفر

∴ نهــا_{س ← ٢} د(س) غير موجودة

٢٣

① د(٠⁻) = نهــا_{س ← ٠⁻} ((س + ٢)⁶ − ٢⁶)/(س(س + ٣٢))

= نهــا_{س ← ٠⁻} [١/(س + ٣٢) × ((س + ٢)⁶ − ٢⁶)/س]

= ١/٣٢ × ٦ × ٢⁵ = ٦

، د(٠⁺) = نهــا_{س ← ٠⁺} (−١٢س)/(١ − (جا س + جتا س)²)

= نهــا_{س ← ٠⁺} (−١٢س)/(١ − (١ + ٢ جا س جتا س))

= نهــا_{س ← ٠⁺} (١٢س)/(٢ جا س جتا س) = ٦

، ∵ د(٠⁺) = د(٠⁻) = ٦

∴ نهــا_{س ← ٠} د(س) = ٦

② د(٠⁻) = نهــا_{س ← ٠⁻} ((١ − جتا س)/(جا² ٣س) × (١ + جتا س)/(١ + جتا س))

= نهــا_{س ← ٠⁻} ((١ − جتا² س)/(جا² ٣س) × ١/(١ + جتا س))

= نهــا_{س ← ٠⁻} (جا² س)/(جا² ٣س)

× نهــا_{س ← ٠⁻} ١/(١ + جتا س)

= ١/٩ × ١/٢ = ١/١٨

، د(٠⁺) = نهــا_{س ← ٠⁺} (½ س² جتا ٦س)/(ظا² ٣س)

= ½ × ١/٩ × ١ = ١/١٨

، ∵ د(٠⁺) = د(٠⁻) = ١/١٨

∴ نهــا_{س ← ٠} د(س) = ١/١٨

٢٤

∵ |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠ }

① نهــا_{س ← ٠⁺} (جا |س|)/س = نهــا_{س ← ٠⁺} (جا س)/س = ١

، نهــا_{س ← ٠⁻} (جا |س|)/س = نهــا_{س ← ٠⁻} (جا (−س))/س

= −١

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ نهــا_{س ← ٠} (جا |س|)/س غير موجودة

② نهــا_{س ← ٠⁺} (جتا |س|)/(س + ١) = نهــا_{س ← ٠⁺} (جتا س)/(س + ١) = ١

، نهــا_{س ← ٠⁻} (جتا |س|)/(س + ١) = نهــا_{س ← ٠⁻} (جتا (−س))/(س + ١)

= نهــا_{س ← ٠⁻} (جتا س)/(س + ١) = ١

∵ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = ١

∴ نهــا_{س ← ٠} (جتا |س|)/(س + ١) = ١

٢٥

نهــا_{س ← ٠} √(قا² س − ١)/س = نهــا_{س ← ٠} √(ظا² س)/س

= نهــا_{س ← ٠} |ظا س|/س

، ∵ |ظا س| = { ظا س ، ظا س ≥ ٠ ؛ −ظا س ، ظا س < ٠ }

∴ نهــا_{س ← ٠⁺} |ظا س|/س = نهــا_{س ← ٠⁺} (ظا س)/س = ...

، لاحظ عندما س ← ٠⁺ فإن ظا س ← ...

∴ نهــا ... = نهــا ... [illegible]

∵ عندما س ← ٠ فإن ... [illegible]

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ نهــا $\frac{[illegible]}{س}$ غير موجودة

٢٧

نهــا (ل(س) + هـ(س))

= نهــا (ل(س)) + نهــا (هـ(س))

= ١٤ + ٤ = ١٨

، نهــا (ل(س) + هـ(س))

= نهــا (ل(س)) + نهــا (هـ(س))

= ١٠ + ٨ = ١٨

∴ نهــا (ل(س) + هـ(س)) = نهــا (ل(س) + هـ(س))

∴ نهــا [ل(س) + هـ(س)] = ١٨

٢٩

① ∵ نهــا $\frac{١}{س - ٢}$ = $\frac{١}{٠}$ = ∞

، نهــا $\frac{١}{س - ٢}$ = $\frac{١}{٠}$ = ∞

∴ نهــا $\frac{١}{س - ٢}$ غير موجودة

② ∵ نهــا د(س) = $\frac{١}{٠}$ = ∞

، نهــا د(س) = $\frac{١}{٠}$ = ∞

∴ نهــا د(س) = ∞

③ ∵ نهــا ... = ... [illegible]

نهــا (س − ٢) = −١

∴ نهــا د(س) غير موجودة.

٢٨

د(س) = { ١ + $\frac{س(س + ٢)}{-(س + ٢)}$ ، −٣ < س < −٢ ؛ ١ + $\frac{س(س + ٢)}{س + ٢}$ ، −٢ < س < ٠ ؛ ٢س + ١ ، ٠ < س < ٢ }

= { ١ − س ، −٣ < س < −٢ ؛ ١ + س ، −٢ < س < ٠ ؛ ٢س + ١ ، ٠ < س < ٢ }

① نهــا د(س) غير موجودة

نهــا د(س) = ٤

∴ نهــا د(س) غير موجودة.

② نهــا د(س) = ١ − (−٢) = ٣

نهــا د(س) = ١ + (−٢) = −١

∴ نهــا د(س) غير موجودة.

③ نهــا د(س) = ١

نهــا د(س) = ١

∴ نهــا د(س) = ١

④ نهــا د(س) = ٢ (٣) + ١ = ٧

، نهــا د(س) غير موجودة

∴ نهــا د(س) غير موجودة.

د(٣) = نهــا ... [illegible]

= $\frac{٣}{٢}$ نهــا (...) [illegible]

= $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{١}{٣}$ × ٤ = ...

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٣

∴ د(٣) = د(٣) ∴ ... [illegible]

٣٠

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٢

∴ د(٢) = د(٣)

∴ نهــا $\frac{س^2 + ... }{(س - ٢)(س - ١)}$ = ١٢

∵ المقام = صفر عندما س = ٢

∴ البسط = صفر عندما س = ٢

∴ (٢)² + ٢ (٢) + ... = ٠

∴ ... [illegible]

∴ نهــا $\frac{...}{(س - ٢)(س - ١)}$ = ١٢

∴ نهــا $\frac{...}{(س - ٢)(س - ١)}$ = ١٢

∴ نهــا $\frac{...}{(س - ٢)(س - ١)}$ = ١٢

... [illegible]

٣١

① ... ② ... ③ ... ④ ... ⑤ ...

⑥ ... ⑦ ... ⑧ ... ⑨ ... ⑩ ...

إرشادات لحل رقم

① ∵ د(س) = س² ...

... [illegible]

② ∵ نهــا د(س) = ٠ ...

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة ... [illegible]

③ ∵ نهــا د(س) = ٠ ...

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة ... [illegible]

∴ نهــا د(س) = ٠

④ ∵ د دالة كثيرة حدود ، نهـــا د (س) = ٢ (س ← ٠)

∴ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٢)

∴ منحنى د^{-١} يمر بالنقطة (٢ ، ٢)

∴ نهـــا د^{-١} (س) = ٢ (س ← ٢)

⑤ ∵ منحنى د (س + ١) هو نفس منحنى د (س) بإزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة في اتجاه و س←

• ∵ نهـــا د (س) = ٥ عند س ← ٢

∴ نهـــا د (س + ١) = ٥ عندما س ← ١

أي أن : نهـــا د (س + ١) = ٥ (س ← ١)

⑥ ∵ نهـــا ([د (س)]^٣ − ٦٤) / (د (س) − ٤)

• لاحظ أن عند س ← −٢

فإن • (س) ← د (−٢) أي أن : د (س) ← ٤.

= نهـــا ([د (س)]^٣ − (٤)^٣) / ([د (س)] − (٤)) = ٣ (٤)^٢ = ٤٨

⑦ من الرسم نجد أن د (س) = س − ١

• ى (س) = − س + ١

∴ نهـــا د (س) / ى (س) = نهـــا (س − ١) / (− س + ١) (س ← ١)

= نهـــا (س − ١) / (−(س − ١)) = −١

⑧



لاحظ أن : منحنى | د (س) | هو نفس منحنى د (س) بعد أنعكاس الجزء الموجود اسفل محور السينات لأعلى كما بالشكل السابق

ومن الرسم ∴ نهـــا | د (س) | = ١ (س ← ٢)

⑨ ∵ د (س) = ٤/٣ س + ٤

وبتبديل المتغيرين ∴ س = ٤/٣ ص + ٤

∴ ص = ٣/٤ (س − ٤) = ٣/٤ س − ٣

∴ د^{-١} (س) = ٣/٤ س − ٣

∴ نهـــا د (س) / د^{-١} (س)

= نهـــا (٤/٣ س + ٤) / (٣/٤ س − ٣) = ١٦/٩

إجابات تمارين 18

أولاً تمارين على الاتصال عند نقطة

١

① ∵ د (−١) = نهـــا (س^٢ + س − ٢) = −٢ (س ← −١)

∴ الدالة د متصلة عند س = −١

② ∵ د (٩) = نهـــا ∛(س − ١) = ٢ (س ← ٩)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٩

③ ∵ د (١) = نهـــا (س^٢ − ٤) / (س − ٢) = ٣ (س ← ١)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

• ∵ د (٢) غير معرفة

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

④ د (٣) = نهـــا (| ٥ − | س − ١٢ |) = ٥ (س ← ٣)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٣

⑤ ∵ د (٤) = نهـــا (| س − ٤ | + | س + ٢ |) = ٦ (س ← ٤)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٤

• ∵ د (−٢) = نهـــا (| س − ٤ | + | س + ٢ |) = ٦ (س ← −٢)

∴ الدالة د متصلة عند س = −٢

⑥ ∵ د (١/٢) = ٤ (١/٢)^٢ + ٣ = ٤

• د ((١/٢)^−) = نهـــا (٤ س^٢ + ٣) = ٤ (س ← ١/٢)

• د ((١/٢)^+) = نهـــا (٥ − ٢ س) = ٤ (س ← ١/٢)

∴ د (١/٢) = د ((١/٢)^−) = د ((١/٢)^+)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١/٢

⑦ ∵ د (−١) = نهـــا ٢ س = −٢ (س ← −١)

∴ الدالة د متصلة عند س = −١

• ∵ الدالة د غير معرفة عند س = ١

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ١

⑧ • عند س = −٢

د (−٢) = ١ ، د (−٢^−) = ١

• د (−٢^+) = نهـــا (س + ٤) = ٢ (س ← (−٢)^+)

• ∵ د (−٢^−) ≠ د (−٢^+)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = −٢

• عند س = −١

د (−١) = −٢ + ٣ = ١

• د (−١^−) = ١

• د (−١^+) = نهـــا (٢ س + ٣) = ١ (س ← −١)

∴ د (−١) = د (−١^−) = د (−١^+)

∴ الدالة د متصلة عند س = −١

⑨ ∵ د (١) = ٤

• د (١^−) = نهـــا (س^٢ + ٣) = ٤

• د (١^+) = نهـــا (س^٢ + ٢ س − ٣) / (س − ١)

= نهـــا ((س − ١)(س + ٣)) / (س − ١) = ٤

• ∵ د (١) = د (١^−) = د (١^+)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑩ د (س) = { س^٢ ، س > ٠ ؛ ٢ ، س = ٠ ؛ − س^٢ ، س < ٠ }

د (٠) = ٢

• د (٠^+) = نهـــا س^٢ = ٠

• د (٠^−) = نهـــا (− س^٢) = ٠

∵ د (٠) ≠ نهـــا د (س)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٠

⑪ د (س) = { ١ ، س > ٢ ؛ ٢ ، س = ٢ ؛ −١ ، س < ٢ }

د (٢) = ٢ ، د (٢^+) = ١ ، د (٢^−) = −١

∵ د (٢) ≠ د (٢^+) ≠ د (٢^−)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

⑫ د (س) = { (س^٢ − س − ٢) / (س − ٢) ، س > ٢ ؛ ٣ ، س ≤ ٢ }

= { ((س − ٢)(س + ١)) / (س − ٢) ، س > ٢ ؛ ٣ ، س ≤ ٢ }

= { س + ١ ، س > ٢ ؛ ٣ ، س ≤ ٢ }

∴ د (٢) = ٣

• د (٢^+) = نهـــا [illegible] = ٣

، د (٢^−) = نهـا_{س ← ٢} (س + ١) = ٣

∵ د (٢) = د (٢^+) = د (٢^−)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑬ د (٢) = ٣ × ٤ + ٢ = ١٤

، نهـا_{س ← ٢} د (س) = نهـا_{س ← ٢} (س^٧ − ٢^٧) / (س^٤ − ٢^٤)

= ٧/٤ (٢)^٣ = ١٤

∴ د (٢) = نهـا_{س ← ٢} د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑭ د (٠) = ٠

، د (٠^−) = ٢ نهـا_{س ← ٠} جا س = ٠

، د (٠^+) = نهـا_{س ← ٠} (١ − جتا س) / س = ٠

∴ د (٠) = د (٠^−) = د (٠^+)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑮ د (٢) = ١/٤

، د (٢^+) = نهـا_{س ← ٢^+} (١ − ٣/س^٢) = ١/٤

، د (٢^−) = نهـا_{س ← ٢^−} جا (س − ٢) / (س^٢ − ٤)

= نهـا_{س ← ٢^−} جا (س − ٢) / (س − ٢)

× نهـا_{س ← ٢^−} ١ / (س + ٢) = ١ × ١/٤ = ١/٤

∵ د (٢) = د (٢^−) = د (٢^+)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑯ د (س) = { −س^٢ + ٤ ، س ≤ ٠ ؛ ٤ ، س > ٠ }

د (٠) = ٤

، د (٠^−) = نهـا_{س ← ٠^−} (−س^٢ + ٤) = ٤

، د (٠^+) = ٤

∴ د (٠) = د (٠^+) = د (٠^−)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑰ د (س) = { (س − ١)(س + ٢) / |س + ٢| ، س ≠ −٢ ؛ ٢ ، س = −٢ }

= { س − ١ ، س > −٢ ؛ ٢ ، س = −٢ ؛ −س + ١ ، س < −٢ }

• عند س = −٢

د (−٢) = ٢

، د (−٢^+) = نهـا_{س ← −٢^+} (س − ١) = −٣

، د (−٢^−) = نهـا_{س ← −٢^−} (−س + ١) = ٣

∵ د (−٢^+) ≠ د (−٢^−)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = −٢

• عند س = ١

د (١) = صفر

، نهـا_{س ← ١} د (س) = نهـا_{س ← ١} (س − ١)

= صفر

∵ د (١) = نهـا_{س ← ١} د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑱ د (س) = { −س − ٣ ، س < −٣ ؛ س + ٣ ، −٣ ≤ س ≤ ٢ ؛ ١١ − ٣س ، س > ٢ }

• عند س = −٣

د (−٣) = صفر

، د (−٣^−) = نهـا_{س ← −٣^−} (−س − ٣) = صفر

، د (−٣^+) = نهـا_{س ← −٣^+} (س + ٣) = صفر

∴ د (−٣) = د (−٣^−) = د (−٣^+)

∴ الدالة د متصلة عند س = −٣

• عند س = ٢

د (٢) = ٥

، د (٢^−) = نهـا_{س ← ٢^−} (س + ٣) = ٥

، د (٢^+) = نهـا_{س ← ٢^+} (١١ − ٣س) = ٥

∴ د (٢) = د (٢^−) = د (٢^+)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑲ د (٠) = ٢

، د (٠^+) = نهـا_{س ← ٠^+} (س + ٢) / (س + ١) = ٢

، د (٠^−) = نهـا_{س ← ٠^−} (٥س^٢ + جا^٢ ٢س) / (س ظا ٢س)

= نهـا_{س ← ٠^−} (٥ + (جا ٢س / س)^٢) / (ظا ٢س / س)

= (٥ + ٤) / ٢ = ٢

∴ د (٠) = د (٠^+) = د (٠^−)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑳ د (π) = ١

، نهـا_{س ← π} د (س) = نهـا_{س ← π} جا س / (π − س)

= نهـا_{(π − س) ← ٠} جا (π − س) / (π − س) = ١

∴ د (π) = نهـا_{س ← π} د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = π

① د (−٣) = −٣ + أ

، نهـا_{س ← −٣} د (س)

= نهـا_{س ← −٣} (س + ٣)(س − ١) / (س + ٣) = −٤

∵ الدالة د متصلة عند س = −٣

∴ −٣ + أ = −٤ ∴ أ = −١

② نهـا_{س ← ٢} د (س)

= نهـا_{س ← ٢} (س − ٢)(س − ٣) / ((س − ٢)(س^٢ + ٢س + ٤))

= نهـا_{س ← ٢} (س − ٣) / (س^٢ + ٢س + ٤) = −١/١٢

، د (٢) = −٣ / |أ|

∵ الدالة د متصلة عند س = ٢

∴ −١/١٢ = −٣ / |أ| ∴ |أ| = ٣٦ ∴ أ = ±٣٦

③ د (١) = ك

، نهـا_{س ← ١} د (س)

= نهـا_{س ← ١} (√(س + ٣) − ٢) / (س^٢ − ١) × (√(س + ٣) + ٢) / (√(س + ٣) + ٢)

= نهـا_{س ← ١} (س + ٣ − ٤) / ((س − ١)(س + ١)(√(س + ٣) + ٢))

= نهـا_{س ← ١} ١ / ((س + ١)(√(س + ٣) + ٢)) = ١/٨

∵ الدالة د متصلة عند س = ١ ∴ ك = ١/٨

④ د (٠) = أ + ١

، نهـا_{س ← ٠} د (س) = نهـا_{س ← ٠} ظا^٢ ٢س / (س ظا ٢س)

= نهـا_{س ← ٠} (ظا ٢س / س)^٢ / (ظا ٢س / س) = ٢

(١٠) د(س) = { جا س / س ، س > ٠ ؛ −جا س / س ، س < ٠ }

∵ د(٠⁺) = نهـا (س ← ٠⁺) جا س / س = ١

، د(٠⁻) = نهـا (س ← ٠⁻) −جا س / س = −١

، ∵ د(٠⁺) ≠ د(٠⁻)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ٠

ثانيا تمارين على الاتصال على فترة

١

(١) ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

(٢) ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

(٣) ∵ الدالة كسرية
، س − ٣ = ٠ ∴ س = ٣
∴ الدالة د متصلة على ح − {٣}

(٤) ∵ الدالة كسرية
، س² − ٥ س + ٦ = ٠
∴ (س − ٣) (س − ٢) = ٠
∴ س = ٣ أ، س = ٢
∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

(٥) ∵ الدالة كسرية
، س⁴ − ١٣ س² + ٣٦ = ٠
∴ (س² − ٩) (س² − ٤) = ٠
س = ±٣ أ، س = ±٢
∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣ ، ٢ ، −٢}

(٦) ∵ الدالة كسرية
، س² + س + ١ = ٠
لا توجد أصفار للمقام ∴ د متصلة على ح

(٧) ∵ الدالة كسرية
، س³ − س = ٠ ∴ س (س² − ١) = ٠
∴ س = ٠ أ، س = ±١
∴ د متصلة على ح − {٠ ، ١ ، −١}

(٨) ∵ الدالة على شكل مقياس لكثيرة حدود
∴ د متصلة على ح

(٩) ∵ كل من الدالتين س³ ، جا ٢ س متصلة على ح
∴ د متصلة على ح

(١٠) ∵ كل من الدالتين جا س ، ٣ جتا (س + ١)
متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

(١١) ∵ كل من الدالتين (٣ س + ٤)² ، جا ٢ س
متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

(١٢) ∵ الدالة كسرية
، |س| − ٢ = ٠
∴ |س| = ٢ ∴ س = ±٢
∴ د متصلة على ح − {٢ ، −٢}

(١٣) ∵ الدالة كسرية
، |س| + ١ = ٠ |س| = −١ مرفوض
∴ د متصلة على ح

(١٤) ∵ س − ٢ > ٠ ∴ س > ٢
∴ د متصلة على]٢ ، ∞[

(١٥) ∵ الدوال س² ، (س + ١) ، جا ٣ س
متصلة على ح
∴ د متصلة على ح − {−١}

(١٦) ∵ س − ٤ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٤
∴ س ∈ [٤ ، ∞[
∴ د متصلة على الفترة [٤ ، ∞[− {٦}

(١٧) ∵ س − ٣ ≥ ٠
∴ س ≥ ٣ ∴ س ∈ [٣ ، ∞[
∴ د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[− {٢ ، −٢}
أى أن د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[

(١٨) ∵ س + ٢ > ٠
∴ س > −٢ ∴ س ∈]−٢ ، ∞[
∴ د متصلة على الفترة]−٢ ، ∞[− {٠}

(١٩) ∵ س + ٢ ≥ ٠
∴ س ≥ −٢ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[
، س + ٢ ≠ ١ ∴ س ≠ −١
∴ د متصلة على [−٢ ، ∞[− {−١}

(٢٠) ∵ س + ٢ ≥ ٠
س ≥ −٢ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[
، ٣ − س ≥ ٠ ٣ ≥ س
∴ س ∈]−∞ ، ٣]
∴ د متصلة على [−٢ ، ٣]

(٢١) ∵ ٢٥ − س² > ٠ س² < ٢٥
|س| < ٥ −٥ < س < ٥
∴ د متصلة على الفترة]−٥ ، ٥[

(٢٢) ٥ − |س| ≥ ٠
|س| ≤ ٥ ∴ −٥ ≤ س ≤ ٥
∴ د متصلة على الفترة [−٥ ، ٥]

(٢٣) ∵ جا س = ٠ عندما س = π ن
∴ د متصلة على
ح − {س : س = π ن ، ن ∈ ص}

(٢٤) [illegible]
∴ د متصلة على
ح − {س : س = π/٢ + π ن ، ن ∈ ص}

(٢٥) كل من الدالتين جا ٢ س ، جتا ٥ س
متصلة على ح
، ∵ ١ − جتا س = ٠ ∴ جتا س = ١
∴ س = ٢ π ن
∴ د متصلة على
ح − {س : س = ٢ π ن ، ن ∈ ص}

(٢٦) ∵ ١ + جا س = ٠ ∴ جا س = −١
∴ س = ٣π/٢ + ٢ π ن
∴ د متصلة على
ح − {س : س = ٣π/٢ + ٢ π ن ، ن ∈ ص}

(٢٧) كل من الدالتين (جا² س ، جتا س) متصلة على ح
، س² − ٩ = ٠ ∴ س = ±٣
∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣}

(٢٨) د متصلة على
ح − {س : س = π/٢ + ن π ، ن ∈ ص}

(٢٩) ∵ ظا س متصلة على
ح − {π/٢ + ن π ، ن ∈ ص}
، س² − ٩ = ٠ ∴ س = ±٣
∴ الدالة د متصلة على
ح − {٣ ، −٣ ، π/٢ + ن π} حيث ن ∈ ص

① أولاً : ∵ د (س) = س^٢ + ١ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]− ∞ ، ١[

، د (س) = ٢ س كثيرة حدود

∴ د متصلة على]١ ، ∞[

ثانيًا : ∵ د (١) = ٢

، د (١^−) = نهـا_{س ← ١^−} (س^٢ + ١) = ٢

، د (١^+) = نهـا_{س ← ١^+} (٢ س) = ٢

∵ د (١) = د (١^−) = د (١^+)

∴ د متصلة عند س = ١ ∴ د متصلة على ح

② أولاً : ∵ د (س) = س^٢ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]− ∞ ، ٣[

، ∵ د (س) = ٥ س − ٤ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٣ ، ∞[

ثانيًا : ∵ د (٣) = ١١

، د (٣^−) = نهـا_{س ← ٣^−} س^٢ = ٩

، د (٣^+) = نهـا_{س ← ٣^+} (٥ س − ٤) = ١١

∵ د (٣^−) ≠ د (٣^+)

∴ د غير متصلة عند س = ٣

∴ د متصلة على ح − {٣}

③ أولاً :

∵ د (س) = س^٢ − ٣ س + ٢ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]−∞ ، ٢[

، د (س) = ٢ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٢ ، ٤[

∵ د (س) = ٦ − س^٢ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٤ ، ∞[

ثانيًا : د (٢) = ٢

، د (٢^−) = نهـا_{س ← ٢^−} (س^٢ − ٣ س + ٢) = ٢

، د (٢^+) = ٢

∵ د (٢) = د (٢^−) = د (٢^+)

∴ د متصلة عند س = ٢

ثالثًا : د (٤) = ٢ ، د (٤^−) = ٢

، د (٤^+) = نهـا_{س ← ٤^+} (٦ − س^٢) = −١٠

∵ د (٤^+) ≠ د (٤^−)

∴ د غير متصلة عند س = ٤

∴ د متصلة على ح − {٤}

④ أولاً : د (س) = ١ + جا س

متصلة على [٠ ، $\frac{\pi}{2}$[

، د (س) = ١ − جتا ٢ س

متصلة على]$\frac{\pi}{2}$ ، ∞[

ثانيًا : د (٠) = ١

، د (٠^+) = نهـا_{س ← ٠^+} (١ + جا س) = ١

∴ د (٠) = د (٠^+)

∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠

ثالثًا : د ($\frac{\pi}{2}$) = ٢

، د ($\frac{\pi}{2}^-$) = نهـا_{س ← $\frac{\pi}{2}^-$} (١ + جا س) = ٢

، د ($\frac{\pi}{2}^+$) = نهـا_{س ← $\frac{\pi}{2}^+$} (١ − جتا ٢ س) = ٢

∴ د ($\frac{\pi}{2}^-$) = د ($\frac{\pi}{2}^+$) = د ($\frac{\pi}{2}$)

∴ د متصلة عند س = $\frac{\pi}{2}$

∴ د متصلة على [٠ ، ∞[

⑤ أولاً : د (س) = جا س

متصلة على]$\frac{-\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[

، د (س) = جتا س

متصلة على]$\frac{3\pi}{4}$ ، ٢ π[

ثانيًا : ∴ د ($\frac{-\pi}{4}$) = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

، د ($\frac{-\pi}{4}^+$) = نهـا_{س ← ($\frac{-\pi}{4}$)^+} جا س = − $\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵ د ($\frac{-\pi}{4}$) = د (−$\frac{\pi}{4}^+$)

∴ د متصلة من اليمين عند س = − $\frac{\pi}{4}$

ثالثًا : د ($\frac{3\pi}{4}$) = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

د ($\frac{3\pi}{4}^+$) = نهـا_{س ← $\frac{3\pi}{4}^+$} جتا س = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

د ($\frac{3\pi}{4}^-$) = نهـا_{س ← $\frac{3\pi}{4}^-$} جا س = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵ د ($\frac{3\pi}{4}^-$) ≠ د ($\frac{3\pi}{4}^+$)

∴ د غير متصلة عند س = ($\frac{3\pi}{4}$)

رابعًا : د (٢ π) = ١

د (٢ π^−) = نهـا_{س ← ٢π^−} جتا س = ١

∴ د (٢ π) = د (٢ π^−)

∴ د متصلة من اليسار عند س = ٢ π

∴ د متصلة على الفترة [−$\frac{\pi}{4}$ ، ٢ π] − {$\frac{3\pi}{4}$}

⑥ أولاً : د (س) = $\frac{\text{س ظا س + جا}^2\text{ ٢ س}}{\text{٥ س}^2}$

متصلة على]−$\frac{\pi}{4}$ ، ٠[

، د (س) = ٢ جتا ٢ س متصلة على]٠ ، $\frac{\pi}{4}$[

ثانيًا : د (٠) = ٢ ، د (٠^−)

= نهـا_{س ← ٠^−} $\frac{\text{س ظا س + جا}^2\text{ ٢ س}}{\text{٥ س}^2}$

= نهـا_{س ← ٠^−} $\frac{\frac{\text{ظا س}}{\text{س}} + (\frac{\text{جا ٢ س}}{\text{س}})^2}{5}$

= ٢

، د (٠^+) = نهـا_{س ← ٠^+} (٢ جتا ٢ س) = ٢

، ∵ د (٠^+) = د (٠^−) = د (٠)

∴ د متصلة عند س = ٠

∴ د متصلة على]−$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$[

⑦ د (س) = $\frac{(\text{س} + 3)^4 - 81}{\text{س}}$

متصلة على]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[، د (٠) = ١٠٨

، نهـا_{س ← ٠} د (س) = نهـا_{س ← ٠} $\frac{(\text{س} + 3)^4 - 3^4}{\text{س}}$

= ٤ (٣)^٣ = ١٠٨

∵ د (٠) = نهـا_{س ← ٠} د (س)

∴ د متصلة عند س = ٠ ∴ د متصلة على ح

⑧

∵ د (س) = { ٥ + س^٢ ، س ≤ ٠ ؛ ٥ ، س > ٠ }

د (س) = ٥ + س^٢ كثيرة حدود متصلة على]−∞ ، ٠[

، د (س) = ٥ كثيرة حدود متصلة]٠ ، ∞[

، د (٠) = ٥ د (٠^+) = ٥ د (٠^−) = ٥

∵ د (٠) = د (٠^−) = د (٠^+)

∴ د متصلة عند س = ٠ ∴ د متصلة على ح

∵ أ = $-\frac{5}{6}$ ، ب = $-\frac{5}{6}$

∵ ٢أ + ب = −٢ (٢)

∵ $\lim_{س \to ٢^-}$ (أس + ب) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (−٢س)

∵ د(٢⁻) = د(٢⁺)

∴ د متصلة عند س = ٢

∵ −٣ = −أ + ب (١)

∵ $\lim_{س \to -١^-}$ (٣س) = $\lim_{س \to -١^+}$ (أس + ب)

∵ د(−١⁻) = د(−١⁺)

∵ د متصلة عند س = −١

∴ د(س) متصلة على ح

٥

∴ د متصلة عند س = ٠ ، ∵ د(٠⁻) = د(٠⁺)

∴ د متصلة على [−π ، π]

٦

∵ ب = ٢ ، أ = ٣

∵ أ + ب = ب + ٣ = ٨

∵ د(١⁻) = د(١⁺) = د(١)

∴ د متصلة عند س = ١

٧

١٨٦

∴ د متصلة عند س = −٢

∴ د(−٢⁻) = د(−٢⁺) = د(−٢)

٨

د(س) = ٠

١١

٩

١٠

∵ د متصلة على ح − {٢}

∴ د(٢⁻) ≠ د(٢⁺)

د(٢) = ٥

∴ د متصلة عند س = ١

∴ د(١⁻) = د(١⁺) = د(١)

٧ (٢) ، ٧ (٣) ، ٦ (٢)

٣ (١) ، ٥ (٤) ، ٤ (٤)

١ (٢) ، ٨ (٣) ، ٢ (٣)

∵ أ = ٧

∴ د(س) متصلة على ح

١٨٧

١٨٨

٨

∵ نق = $\frac{٧\sqrt{٣}}{٢ \text{ جا } ٦٠°}$ = ٧ سم

∴ مساحة الدائرة = $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} = ١٥٤ سم^{٢}

، محيط الدائرة = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

٩

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٤٥°) = ٧٥°

∴ $\frac{أ}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{ب}{\text{جا } ٤٥°} = \frac{حـ}{\text{جا } ٧٥°}$

∴ $\frac{أ}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{ب}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = \frac{حـ}{\frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}}$

∴ أ : ب : حـ

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢} : \frac{\sqrt{٢}}{٢} : \frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}$ (بالضرب × ٢ $\sqrt{٢}$)

= $\sqrt{٦}$: ٢ : $\sqrt{٣}$ + ١

١٠

∵ نق = $\frac{١٣}{٢ \text{ جا } ٥٣° ٨َ}$ = ٨,١ سم ، $\frac{١٣}{\text{جا } ٥٣° ٨َ} = \frac{١٥}{\text{جا حـ}}$

∴ جا حـ = $\frac{١٥ \text{ جا } ٥٣° ٨َ}{١٣}$ (موجبة)

∴ ∠ حـ حادة أو منفرجة

∴ ق (∠ حـ) = ٦٧° ٣٢َ ٩ أو ١١٢° ٣٦َ ٥١

١١

∵ $\frac{٨}{\text{جا } ٣٥°} = \frac{٦}{\text{جا ب}}$ ∴ جا ب = $\frac{٦ \text{ جا } ٣٥°}{٨}$

∴ ق (∠ ب) = ٢٥° ٣٤َ ٤٨ والحل الآخر مرفوض.

١٢

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١٣° ٥٧َ ٤٨ + ٦٤° ٤٨) = ٣٩° ٨ َ ٤٨

، ∵ $\frac{حـ}{\text{جا حـ}} = \frac{أ + ب + حـ}{\text{جا أ} + \text{جا ب} + \text{جا حـ}}$

∴ $\frac{٥.٢}{\text{جا } ٣٩° ٨َ} = \frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب حـ}}{\text{جا } ١٣° ٥٧َ + \text{جا } ٣٩° ٨َ + \text{جا } ١٢٨° ٦٤}$

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٢٦,٥ سم

١٣

∵ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ $\frac{أ}{\text{جا } ٧٥°} = \frac{ب}{\text{جا } ٤٥°} = \frac{حـ}{\text{جا } ٦٠°}$ = ٤٠

∴ أ = ٤٠ جا ٧٥° = ٣٨,٦ سم

، ب = ٤٠ جا ٤٥° = ٢٨,٣ سم

، حـ = ٤٠ جا ٦٠° = ٣٤,٦ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٣٨,٦ × ٢٨,٣ × جا ٦٠°

= ٤٧٣ سم^{٢}

، محيط المثلث = ٣٨,٦ + ٢٨,٣ + ٣٤,٦ = ١٠١,٥ سم

١٤

∵ Δ أ ب حـ متساوي الساقين

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) = ٣٠°

، ∵ $\frac{حـ}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{حـ}{\text{جا } ٣٠°}$ = ٢٤

∴ حـ = ٢٤ جا ٣٠° = ١٢ سم ∴ ب = حـ = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٢ جا ١٢٠° = ٦٢,٤ سم^{٢}

١٥

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١٥° + ١٥°) = ١٥٠°

∴ $\frac{أ}{\text{جا } ١٥°} = \frac{ب}{\text{جا } ١٥°} = \frac{حـ}{\text{جا } ١٥٠°}$

∴ إحدى النسب = $\frac{أ + ب + حـ}{\text{جا } ١٥° + \text{جا } ١٥° + \text{جا } ١٥٠°}$

= $\frac{٢٥}{\text{جا } ١٥° + \text{جا } ١٥° + \text{جا } ١٥٠°}$ = ٢٤,٥٧

∴ ٢ نق = ٢٤,٥٧ ∴ نق = ١٢,٢٨٥ سم

∴ مساحة الدائرة = π × (١٢,٢٨٥)^{٢} = ٤٧٤ سم^{٢}

١٦

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٤٤° + ٧٦°) = ٦٠°

∴ $\frac{أ}{\text{جا } ٤٤°} = \frac{ب}{\text{جا } ٧٦°} = \frac{حـ}{\text{جا } ٦٠°}$

= $\frac{٤٠}{\text{جا } ٤٤° + \text{جا } ٧٦° + \text{جا } ٦٠°}$

∴ أ = ٩,١٠ سم ، ب = ١٤,٣ سم ، حـ = ١٢,٨ سم

١٧

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٢٠° + ٦٠°) = ١٠٠°

∴ $\frac{أ}{\text{جا } ٢٠°} = \frac{١٢}{\text{جا } ١٠٠°}$ ∴ أ = $\frac{١٢ \text{ جا } ٢٠°}{\text{جا } ١٠٠°}$ = ٤,٢ سم

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤,٢ × ١٢ × جا ٦٠° = ٢٢ سم^{٢}

١٨

∵ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا حـ

∴ ٤٥٠ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا ٥٦° ∴ ب = $\frac{٩٠٠}{\text{أ جا } ٥٦°}$

، ∵ $\frac{أ}{\text{جا } ٤٢°} = \frac{ب}{\text{جا } ٨٢°}$ ∴ $\frac{أ}{\text{جا } ٤٢°} = \frac{٩٠٠}{\text{أ جا } ٥٦° \text{ جا } ٨٢°}$

∴ أ^{٢} = $\frac{٩٠٠ \text{ جا } ٤٢°}{\text{جا } ٥٦° \text{ جا } ٨٢°}$ ∴ أ = ٢٧ سم

١٩

∵ ٤٢,٣ = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × ١٢ × جا ٦٠ ∴ أ ب = ١٢ سم

، ∵ ق (∠ أ) = ٤٢° ٣٦َ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٢° ٣٦َ}{٢}$ = ٦٨° ٣٤َ

∴ $\frac{ب حـ}{\text{٠.٦}} = \frac{١٢}{\text{جا } ٦٨° ٣٤َ}$

∴ ب حـ = $\frac{١٢ \text{ جا } ٤٢° ٣٦َ}{\text{جا } ٦٨° ٣٤َ}$ = ٧,٦ سم





٢٣

∵ ظا أ = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

∴ جا أ = $\frac{١}{٣}$



∴ $\frac{٨}{\frac{١}{٣}} = \frac{٢٠}{جا حـ}$

∴ جا حـ ≃ ٠,٨٣

∴ ق(∠حـ) ≃ ٥٦° ٢٧َ أو ١٢٣° ٣٣َ

، ∵ ∠حـ منفرجة. ∴ ق(∠حـ) ≃ ١٢٣° ٣٣َ

٢٤

∵ ظا حـ = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق(∠حـ) ≃ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٥٣° ٧َ ٤٨ً) = ٩٦° ٥٢َ ١٢ً

∴ $\frac{أ}{جا ٩٦° ٥٢َ ١٢ً} = \frac{٥}{جا ٣٠°} = \frac{حـ}{جا ٥٣° ٧َ ٤٨ً}$

∴ أ = $\frac{٥ جا ٩٦° ٥٢َ ١٢ً}{جا ٣٠°}$ ≃ ١٠ سم

، حـ = $\frac{٥ جا ٥٣° ٧َ ٤٨ً}{جا ٣٠°}$ ≃ ٨ سم

، مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ جا ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٨ × جا ٣٠°

= ٢٠ سم²

٢٥

① (د) ② (د) ③ (ب) ④ (أ)

⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (جـ)

⑨ (د) ⑩ (ب)

٢٦

∵ $\frac{س + ص + ع}{جا س + جا ص + جا ع}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٥٦,٨٨}{٢ × ٢,٣٧}$ = ١٢ سم

٢٧

∵ $\frac{أ}{جا ٦٠°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = \frac{أ + ب}{جا ٦٠° + جا ٤٥°}$

∴ $\frac{أ}{جا ٦٠°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = \frac{\sqrt{٦} + ٢}{جا ٦٠° + جا ٤٥°}$

∴ أ = $\sqrt{٦}$ سم ، ب = ٢ سم

٢٨

∵ جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ : ب : حـ = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ = ٢ك ، ب = ٤ك ، حـ = ٥ك

، ∵ حـ − ب = ٥ك − ٤ك = ك = ٣

∴ أ = ٦ سم ، ب = ١٢ سم

٢٩

∵ ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠حـ) = ٣ : ٤ : ٣

∴ ق(∠أ) = ٣ك ، ق(∠ب) = ٤ك ، ق(∠حـ) = ٣ك

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

∴ ٣ك + ٤ك + ٣ك = ١٨٠° ∴ ك = ١٨°

∴ $\frac{٥}{جا ٥٤°} = \frac{ب}{جا ٧٢°} = \frac{حـ}{جا ٥٤°}$

= $\frac{محيط Δ ا ب حـ}{جا ٥٤° + جا ٧٢° + جا ٥٤°}$

∴ محيط Δ ا ب حـ ≃ ١٥,٩ سم

٣٠

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

∴ ك + ٣ك + ٥ك = ١٨٠° ∴ ك = ٢٠°

∴ $\frac{أ}{جا ٢٠°} = \frac{ب}{جا ٦٠°} = \frac{حـ}{جا ١٠٠°}$

= $\frac{١٦}{جا ٢٠° + جا ٦٠° + جا ١٠٠°}$

∵ ∠أ أصغر الزوايا قياسًا.

∴ أ أصغر الأضلاع طولًا. ∴ أ = ٢,٥ سم

٣١

∵ ق(∠د) + $\frac{٣}{٢}$ ق(∠أ) + ٢ ق(∠أ) = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٦٠° ، ق(∠حـ) = ٨٠°

، ∵ $\frac{أ}{جا ٤٠°} = \frac{ب}{جا ٦٠°} = \frac{حـ}{جا ٨٠°}$ = ٢٠

∴ أ = ٢٠ جا ٤٠° ، ب = ٢٠ جا ٦٠°

∴ مساحة Δ ا ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ جا ٤٠° × ٢٠ جا ٦٠° × جا ٨٠° ≃ ١١٠ سم²

٣٢

بالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{جا أ}{٢} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا حـ}{٤}$

وبوضع أ = ٢ك ، ب = ٣ك ، حـ = ٤ك

∴ ٢ك + ٣ك + ٤ك = ٤٥ ∴ ك = ٥

∴ أ = ١٠ سم ، حـ = ٢٠ سم

٣٣

من خواص التناسب نجد أن:

$\frac{أ + ب - حـ}{٣ + ٥} = \frac{أ + حـ - ب + ب + حـ - أ}{٥ + ٧} = \frac{أ + ب - حـ + ب + حـ - أ}{٥ + ٧}$

= $\frac{أ - حـ + ب + حـ - ب + أ}{٣ + ٧}$

∴ $\frac{٢أ}{٨} = \frac{٢حـ}{١٢} = \frac{٢ب}{١٠}$ ∴ $\frac{أ}{٤} = \frac{حـ}{٦} = \frac{ب}{٥}$

∴ أ : ب : حـ = ٤ : ٥ : ٦

∴ جا أ : جا ب : جا حـ = ٤ : ٥ : ٦

٣٤

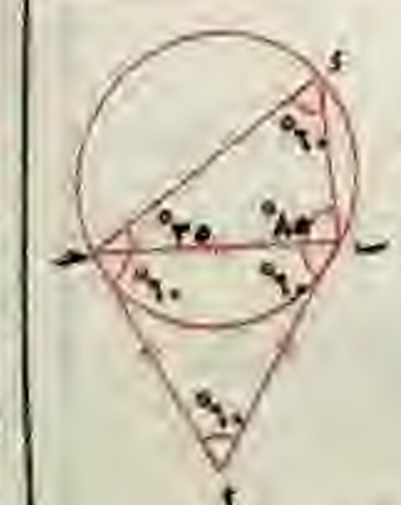
∵ أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

∴ أب = أحـ

، ∵ ق(∠أ) = ٦٠°

∴ Δ ا ب حـ مثلث متساوي الأضلاع.

، ∵ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ أب × أحـ × جا(∠أ)



∴ $٩\sqrt{٣} = \frac{١}{٢} × (أب)^٢ × جا ٦٠°$

∴ $٩\sqrt{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} × (أب)^٢$

∴ أب = ٦ سم ∴ ب حـ = ٦ سم

، ∵ ق(∠ء) = ق(∠ب حـ أ) = ٦٠°

(محيطية ومماسية مشتركتان في ب حـ)

∴ ق(∠ب حـ ء) = ١٨٠° − (٨٥° + ٦٠°) = ٣٥°

∴ في Δ ب حـ ء: $\frac{ب ء}{جا ٣٥°} = \frac{حـ ء}{جا ٨٥°} = \frac{٦}{جا ٦٠°}$

∴ ب ء = $\frac{٦ جا ٣٥°}{جا ٦٠°}$ ≃ ٤ سم

، حـ ء = $\frac{٦ جا ٨٥°}{جا ٦٠°}$ ≃ ٧ سم

∴ محيط المثلث ب حـ ء = ٦ + ٤ + ٧ = ١٧ سم

٣٥

في Δ ا ب حـ:

ق(∠حـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠أ م ب) = ٤٠°

، ق(∠أ ب حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٥°) = ٥٥°

∴ $\frac{٥}{جا ٤٠°} = \frac{ب}{جا ٥٥°} = \frac{أ}{جا ٨٥°}$ = ٢ نق

= $\frac{محيط Δ ا ب حـ}{جا ٤٠° + جا ٥٥° + جا ٨٥°}$

∴ محيط Δ ا ب حـ ≃ ١٩,١٢ سم ، نق ≃ ٣,٨٩ سم

∴ مساحة الدائرة = π نق² = π (٣,٨٩)²

≃ ٤٧,٥ سم²

٣٦

∵ ا ب حـ ء متوازي أضلاع.



∴ ق(∠حـ) = ٥٠°

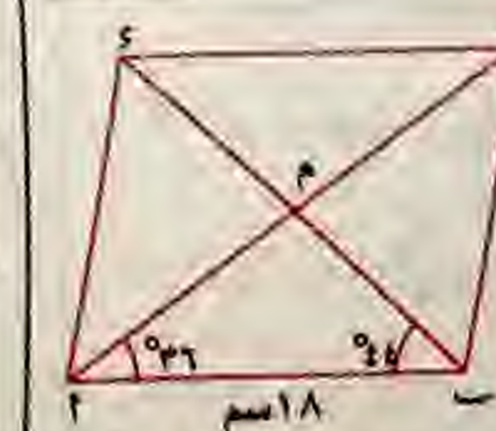
في Δ ب ء حـ:

ق(∠ب ء حـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

∴ $\frac{٨}{جا ٥٠°} = \frac{ب حـ}{جا ٦٠°} = \frac{ء حـ}{جا ٧٠°}$

∴ س ح = ٩ سم ، ء ح = ٨ ، ٦ سم
∴ محيط متوازي الأضلاع = ٢ (س ح + ح ء)
= ٣٨ سم

٣٧



في Δ ا ب م : ق (∠ ا م ب)
= ١٨٠° - (٤٤° + ٣٦°)
= ١٠٠°

∴ $\frac{١٨}{جا ١٠٠°} = \frac{ا م}{جا ٤٤°}$ ∴ ا م = $\frac{١٨ × جا ٤٤°}{جا ١٠٠°}$

∴ ا ح = ٢ (ا م) ≃ ٢٥,٣٩ سم

، مساحة ▱ ا ب ح ء = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٥,٣٩ جا ٣٦°
≃ ٢٦٩ سم²

٣٨



في Δ ا ب م :
ق (∠ م) = ٥٠°
، ق (∠ ب) = ١٨٠° - (٨٥° + ٥٠°) = ٤٥°

∴ $\frac{١٠}{جا ٤٥°} = \frac{ب م}{جا ٨٥°}$

∴ ب م = $\frac{١٠ جا ٨٥°}{جا ٤٥°}$ ≃ ١٤,١ سم

∴ ب ء = ٢ ب م = ٢٨,٢ سم

، مساحة متوازي الأضلاع ا ب ح ء
= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٤,١ جا ٥٠° ≃ ٢١٦ سم²

٣٩



∵ $\overline{اء}$ // $\overline{ب ح}$
∴ ق (∠ ا ء ح)
+ ق (∠ ء ح ب) = ١٨٠°
∴ ق (∠ ء ح ب) = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠°
∴ ق (∠ ء ح ا) = ٦٠° - ٢٣ َ٢٥° = ٣٦ َ٣٥°

∴ في المثلث ا ء ح : $\frac{٢٠}{جا ٣٦ َ٣٥°} = \frac{ا ح}{جا ١٢٠°}$

∴ ا ح = $\frac{٢٠ جا ١٢٠°}{جا ٣٦ َ٣٥°}$ ≃ ٢٩ سم

، في المثلث ا ب ح :
∵ ق (∠ ا) = ١٨٠° - (٦٢° + ٢٣ َ٢٥°) = ٩٤ َ٣٥°

∴ $\frac{٢٩}{جا ٦٢°} = \frac{ب ح}{جا ٩٤ َ٣٥°}$

∴ ب ح = $\frac{٢٩ جا ٩٤ َ٣٥°}{جا ٦٢°}$ ≃ ٣٣ سم

∴ مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ ا ح × ب ح × جا ٢٣ َ٢٥°
+ $\frac{١}{٢}$ ا ح × ا ء × جا ٢٣ َ٢٥°
= $\frac{١}{٢}$ × ٢٩ (٣٣ + ٢٠) جا ٢٣ َ٢٥°
≃ ٢٠٥ سم²

٤٠



في Δ ب ء ح
ق (∠ ء ب ح) = ١٨٠° - (٣٢° + ٨٥°)
= ٦٣°

∴ $\frac{ب ء}{جا ٨٥°} = \frac{١٠٠}{جا ٦٣°}$

∴ ب ء = $\frac{١٠٠ جا ٨٥°}{جا ٦٣°}$ ≃ ١١٢ سم

، في Δ ا ء ح :
ق (∠ ء ا ح) = ١٨٠° - (٤٩° + ٨٧°) = ٤٤°

∴ $\frac{ا ح}{جا ٨٧°} = \frac{١٠٠}{جا ٤٤°}$

∴ ا ح = $\frac{١٠٠ جا ٨٧°}{جا ٤٤°}$ ≃ ١٤٤ سم

٤١



في المثلث ا ب ء :
∵ ا ب = ا ء

∴ ق (∠ ا ء ب) = ٥٠°
ق (∠ ا ء ب) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠°

∴ $\frac{ب ء}{جا ٨٠°} = \frac{١٠}{جا ٥٠°}$

∴ ب ء = $\frac{١٠ جا ٨٠°}{جا ٥٠°}$ ≃ ١٢,٨٦ سم

، ∵ ق (∠ ا ب ح) = ٩٠°
∴ ق (∠ ء ب ح) = ٩٠° - ٥٠° = ٤٠°

∴ مساحة Δ ا ب ء = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٠ × جا ٨٠° ≃ ٤٩ سم²

، مساحة Δ ء ب ح = $\frac{١}{٢}$ × ١٢,٨٦ × ١٢,٨٦ × جا ٤٠°
≃ ٥٣ سم²

∴ مساحة الشكل ا ب ح ء = ٤٩ + ٥٣ = ١٠٢ سم²

٤٢

① ∵ $\frac{ا}{جا ا} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$

بضرب النسبة الأولى × ٣ والثانية × ٤ وبالطرح :

∴ $\frac{٣ ا - ٤ ب}{٣ جا ا - ٤ جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$

② ∵ $\frac{ا}{جا ا} = \frac{ب}{جا ب}$ ∴ ب = $\frac{ا جا ب}{جا ا}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ ا ب جا ح = $\frac{ا^٢ جا ب جا ح}{٢ جا ا}$

③ ∵ $\frac{ا}{جا ا} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$ = ٢ نق

∴ جا ح = $\frac{ح}{٢ نق}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ ا ب × $\frac{ح}{٢ نق}$ = $\frac{ا ب ح}{٤ نق}$

٤٣

① (د)	② (ح)	③ (ح)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (ح)	⑦ (د)	⑧ (ب)
⑨ (ح)	⑩ (ب)	⑪ (ح)	

أفكار بمشكلات الحل رقم ٤٣

① ∵ $\frac{ا}{جا ا} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$ = ٢ نق = ٦

∴ $\frac{ا}{جا ا} × \frac{ب}{جا ب} × \frac{ح}{جا ح}$ = ٦ × ٦ × ٦

∴ $\frac{ا ب ح}{جا ا جا ب جا ح}$ = ٢١٦

② ∵ $\frac{ا}{جا ا} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$ = ٢ نق

∴ ا قتا ا = ب قتا ب = ح قتا ح = ٢ نق

∴ ا قتا ا + ب قتا ب + ح قتا ح = ٦ نق

③ ∵ $\frac{ا + ب + ح}{جا ا + جا ب + جا ح}$ = ٢ نق

∴ $\frac{جا ب + جا ح + جا ا}{جا ا + جا ب + جا ح}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ١ ∴ نق = $\frac{١}{٢}$

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس Δ ا ب ح
= ٢ π نق = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × π = π

④ ∵ $\frac{ا}{جا ا} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$ = ٢ نق

∴ $\frac{جا ا}{ا} = \frac{جا ب}{ب} = \frac{جا ح}{ح} = \frac{١}{٢ نق}$

وبضرب مقدمات وتوالي النسبة الأولى × ا
، النسبة الثانية × ب ، النسبة الثالثة × ح
وجمع المقدمات والتوالي

∴ $\frac{ا جا ا + ب جا ب + ح جا ح}{ا^٢ + ب^٢ + ح^٢} = \frac{١}{٢ نق}$

⑤ ∵ $\frac{ا}{جا ا} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$ = ١٠

∴ ا = ١٠ جا ا ، ب = ١٠ جا ب

، ∵ مساحة Δ ا ب ح = ٢٤

∴ $\frac{١}{٢}$ ا ب جا ح = ٢٤

∴ $\frac{١}{٢}$ × ١٠ جا ا × ١٠ جا ب × جا ح = ٢٤

∴ جا ا جا ب جا ح = $\frac{٢٤}{٥٠} = \frac{١٢}{٢٥}$

∴ جا أ جا ب جا (١٨٠° − (أ + ب)) = ١٢/٢٥

∴ جا أ جا ب جا (أ + ب) = ١٢/٢٥

⑥ ∵ ب حـ = √((٦)² + (٨)²) = ١٠ سم

∴ ب ء = ٤ سم

في Δ أ ب ء : ب ء / جا θ = أ ء / جا ب

∴ ٤ / جا θ = أ ء / ٠,٦ ∴ أ ء جا θ = ٢,٤ (١)

في Δ أ حـ ء : ء حـ / جا (٩٠ − θ) = أ ء / جا حـ

∴ ٦ / جتا θ = أ ء / ٠,٨ ∴ أ ء جتا θ = ٤,٨ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ جتا θ / جا θ = ٤,٨ / ٢,٤

∴ ظتا θ = ٢

⑦ ∵ حـ ء = ٢ ء ب

∴ مساحة Δ أ حـ ء = ٢ مساحة Δ أ ب ء

١/٢ × أ ء × أ حـ × جا ٦٠° = ٢ × ١/٢ × أ ب × أ ء × جا ٤٥°

∴ أ ب / أ حـ = (√٣ / ٢) / (٢ × ١/√٢) = √٦ / ٤

، ∵ أ ب / أ حـ = جا حـ / جا ب ∴ جا ب / جا حـ = ٤ / √٦ = ٢√٦ / ٣

⑧ في Δ أ ب ء : ∵ ب ء / جا أ = أ ء / جا ٤٥°

∴ ب ء / جا أ = ٤√٢ / (١/√٢) = ٨

في Δ ب ء حـ : ∵ ب ء / جا حـ = ب حـ / جا ٣٠°

∴ ب ء / جا حـ = ٢ ب حـ ، ∵ جا أ = جا حـ

∴ ٢ ب حـ = ٨ ∴ ب حـ = ٤ سم

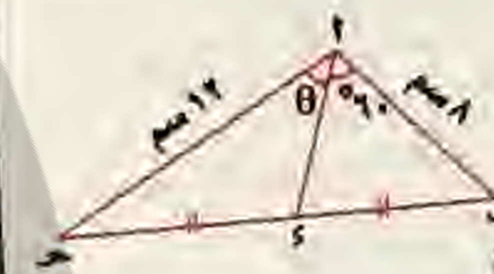
⑨ في Δ حـ ء هـ : ∵ ظا (∠ ء هـ حـ) = ٣/٤

∴ جا حـ = ٤/٥

، في Δ أ ب حـ : ∵ أ ب / جا حـ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ٦ / (٤/٥) ∴ نق = ٣,٧٥ سم

⑩ في Δ أ ب ء :



ب ء / جا ٦٠° = ٨ / جا (∠ أ ء ب)

∴ ب ء × جا (∠ أ ء ب) = ٨ جا ٦٠° = ٤√٣ (١)

في Δ أ ء حـ : حـ ء / جا θ = ١٢ / جا (∠ أ ء حـ)

∴ حـ ء × جا (∠ أ ء حـ) = ١٢ جا θ (٢)

من (١) ، (٢) :

، ∵ ب ء = حـ ء

، جا (∠ أ ء ب) = جا (∠ أ ء حـ)

∴ ١٢ جا θ = ٤√٣ ∴ جا θ = ١/√٣



∴ ظا θ = ١/√٢ ∴ ظا (∠ ء أ حـ) = ١/√٢

⑪ في Δ أ ب حـ :

∵ أ ب / جا ٧٠° = ٦ / جا ٤٠° = ٢ نق

∴ أ ب = ٨,٧٧ سم ، نق = ٤,٦٦٧ سم

∴ مساحة الجزء المظلل

= مساحة الدائرة − مساحة المثلث أ ب حـ

= π نق² − ١/٢ أ حـ × أ ب جا أ

= π × (٤,٦٦٧)² − ١/٢ × ٦ × ٨,٧٧ × جا ٧٠°

= ٤٣,٧ سم²

٤٤ في المثلث أ ب ء :

أ ء / جا (∠ أ ب ء) = ب ء / جا أ



، من Δ ء ب حـ :

ب ء / جا حـ = ب حـ / جا (∠ ب ء حـ)

، ∵ ∠ أ ، ∠ حـ متكاملتان «لأن أ ب حـ ء رباعي دائري»

∴ جا أ = جا حـ ∴ أ ء / جا (∠ أ ب ء) = ب حـ / جا (∠ ب ء حـ)

∴ أ ء × جا (∠ ب ء حـ) = ب حـ × جا (∠ أ ب ء)

٤٥

① ∵ أ / جا أ = ب / جا ب = حـ / جا حـ

∴ (أ + ب + حـ) / (جا أ + جا ب + جا حـ) = أ / جا أ

∴ جا أ + جا ب + جا حـ = ٢ ع جا أ / أ

= ٢ ع جا أ × ب حـ / (أ ب حـ)

، ∵ Δ = ١/٢ ب حـ جا أ

∴ ب حـ جا أ = ٢ Δ

∴ جا أ + جا ب + جا حـ = (٢ ع × ٢ Δ) / (أ ب حـ) = ٤ ع Δ / (أ ب حـ)

② ∵ ١ / (حـ جا أ) = (١/٢ ب) / (١/٢ ب حـ جا أ)

، ١ / (أ جا ب) = (١/٢ حـ) / (١/٢ أ حـ جا ب)

، ١ / (ب جا حـ) = (١/٢ أ) / (١/٢ ب أ جا حـ)

وبالجمع : ∴ ١ / (حـ جا أ) + ١ / (أ جا ب) + ١ / (ب جا حـ)

= (١/٢ ب) / (١/٢ ب حـ جا أ) + (١/٢ حـ) / (١/٢ أ حـ جا ب) + (١/٢ أ) / (١/٢ ب أ جا حـ)

= ١/٢ (ب + حـ + أ) / Δ = ع / Δ

٤٦ ∵ مساحة الدائرة = π نق² ، نق = أ / (٢ جا أ) = ب / (٢ جا ب)

وبالتعويض

∴ مساحة الدائرة = π أ ب / (٤ جا أ جا ب)

إجابات تمارين 20

١

① (حـ) ② (أ) ③ (ب) ④ (د)

٢

∵ ع² = (١٣)² + (١٦)² − ٢ × ١٣ × ١٦ جتا ٩٥° = ٤٦١,٢٦

∴ ع = ٢١,٥ سم

٣

∵ س² = (٣)² + (٥)² − ٢ × ٣ × ٥ جتا ٣٦° ٤١' = ٩,٨

∴ س = ٣ سم

٤

∵ جتا حـ = ((٣)² + (٥)² − (٧)²) / (٢ (٣) (٥)) = −١/٢

∴ ق (∠ حـ) = ١٢٠°

٥

∵ جتا أ = ((٥,٨)² + (٣,٤)² − (٧,٦)²) / (٢ (٥,٨) (٣,٤))

∴ ق (∠ أ) ≃ ١٠٨° ٤٤'

، جتا ب = ((٧,٦)² + (٣,٤)² − (٥,٨)²) / (٢ (٧,٦) (٣,٤))

∴ ق (∠ ب) ≃ ٤٦° ٢٠'

∴ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١٠٨° ٤٤' + ٤٦° ٢٠') = ٢٥° ٩'

٦ (تابع)

∵ جتا ب = $\frac{(١٣)^٢ + (١٥)^٢ - (١٤)^٢}{٢ (١٣)(١٥)}$

∴ ق(∠ ب) ≃ ٥٩ ٢٩ ٥٩°

∴ مساحة Δ ١ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٥ × جا ٥٩ ٢٩ ٥٩°

≃ ٨٤ سم²

٧

∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ جتا س = $\frac{(٢٧)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٨)^٢}{٢ × ٢٧ × ٢٤}$

∴ ق(∠ س) ≃ ٤٠ ٤٨ ٤٠°

، ∵ نق = $\frac{١٨}{٢ جا ٤٠ ٤٨ ٤٠°}$

∴ مساحة الدائرة = π $\left(\frac{١٨}{٢ جا ٤٠ ٤٨ ٤٠°}\right)^٢$ ≃ ٥٩٦ سم²

٨

① حـ² = (٧)² + (٩)² - ٢ (٧) (٩) جتا ٣٣ ٩٦° ≃ ١٤٤

∴ حـ ≃ ١٢ سم

② مساحة Δ ١ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٩ × جا ٣٣ ٩٦° ≃ ٣١ سم²

③ نق = $\frac{حـ}{٢ جا حـ}$ = $\frac{١٢}{٢ جا (٣٣ ٩٦°)}$ ≃ ٦ سم

٩

حـ = ٥٢ - (١٣ + ١٧) = ٢٢ سم

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع

∴ جتا حـ = $\frac{(١٣)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٢)^٢}{٢ (١٣)(١٧)}$

∴ ق(∠ حـ) = ٣٢ ٩٣°

، مساحة Δ ١ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٧ × جا ٣٢ ٩٣°

≃ ١١٠ سم²

١٠

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

∴ جتا س = $\frac{(١٨)^٢ + (١٠)^٢ - (٢٤,٥)^٢}{٢ × ١٨ × ١٠}$

∴ ق(∠ س) ≃ ١٩ ١١٩°

، ∵ نق = $\frac{٢٤,٥}{٢ جا ١٩ ١١٩°}$ ≃ ١٤ سم

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٨٨ سم

١١

∵ ١² = (٢,٥)² + (٢)² - ٢ × ٢,٥ × ٢ × $\frac{٢}{٥}$

= ٦,٢٥

∴ ١ = ٢,٥ سم ∴ ١ = ب

∴ Δ ١ب حـ متساوى الساقين.

١٢

بفرض أن س = ٤ ك ، ص = ٥ ك ، ع = ٦ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع.

∴ جتا س = $\frac{٢٥ ك^٢ + ٣٦ ك^٢ - ١٦ ك^٢}{٢ × ٥ ك × ٦ ك}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ق(∠ س) ≃ ٢٥ ٤١°

١٣

∵ س : ص : ع = جا س : جا ص : جا ع = ٧ : ٨ : ١٢

ويفرض أن : س = ٧ ك ، ص = ٨ ك ، ع = ١٢ ك

، ∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

∴ جتا ع = $\frac{(٧ ك)^٢ + (٨ ك)^٢ - (١٢ ك)^٢}{٢ × ٧ ك × ٨ ك}$ = $\frac{-٣١}{١١٢}$

∴ ق(∠ ع) = ٤ ١٠٦°

١٤

∵ حـ² = (٤)² + (٥)² - ٢ × ٤ × ٥ × $-\frac{١}{٢}$ = ٦١

∴ حـ = ٧,٨ سم

، ∵ جتا حـ = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠ حـ) = ١٢٠°

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × جا ١٢٠° = ٥$\sqrt{٣}$ سم²

١٥

∵ ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ ∴ جا ب = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$

∴ مساحة Δ ١ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ١٨ × $\frac{٣}{٥}$

= ٨٦,٤ سم²

، ب² = (١٦)² + (١٨)² - ٢ × ١٦ × ١٨ × $\frac{٤}{٥}$ = ١١٩,٢

∴ ب ≃ ١١ سم

∴ محيط Δ ١ب حـ = ١٦ + ١٨ + ١١ = ٤٥ سم

١٦

بالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{جا ١}{٦}$ = $\frac{جا ب}{٤}$ = $\frac{جا حـ}{٣}$

∴ ١ : ب : حـ = ٦ : ٤ : ٣

، بفرض أن : ١ = ٦ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٣ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ جتا حـ = $\frac{(٦ ك)^٢ + (٤ ك)^٢ - (٣ ك)^٢}{٢ × ٦ ك × ٤ ك}$ = $\frac{٤٣}{٤٨}$

∴ ق(∠ حـ) ≃ ٢٣ ٢٦°

١٧

∵ ١ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٥

، ويفرض أن : ١ = ٣ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٥ ك

∴ جتا حـ = $\frac{(٣ ك)^٢ + (٤ ك)^٢ - (٥ ك)^٢}{٢ × ٣ ك × ٤ ك}$ = ٠

∴ ق(∠ حـ) = ٩٠°

∵ ٣ ك + ٤ ك + ٥ ك = ٢٤ ∴ ك = ٢

[illegible]

، مساحة Δ ١ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم²

١٨



فى المثلث ١ب حـ

∵ $\frac{٨}{جا ٦٠°}$ = $\frac{١حـ}{جا ٧٥°}$

∴ ١حـ = $\frac{٨ جا ٧٥°}{جا ٦٠°}$ ≃ ٨,٩٢ سم

، ∵ ق(∠ حـ) = ١٨٠° - (٦٠° + ٧٥°) = ٤٥°

∴ (١ء)² = (٨,٩٢)² + (٤)² - ٢ × ٨,٩٢ × ٤ جتا ٤٥°

= ٤٥

∴ ١ء = ٦,٧ سم

١٩



فى المثلث ١ب حـ :

∵ جتا ب = $\frac{(٨)^٢ + (٩)^٢ - (٧)^٢}{٢ × ٨ × ٩}$

= $\frac{٢}{٣}$

∴ ق(∠ ب) = ١١ ٤٨°

∴ فى المثلث ١ب ء :

(١ء)² = (٩)² + (٤)² - ٢ × ٩ × ٤ جتا ١١ ٤٨° = ٤٩

∴ ١ء = ٧ سم ، نق = $\frac{٧}{٢ جا ١١ ٤٨°}$ = ٤,٧ سم

٢٠



∵ (١ب)²

= (٨)² + (١٠)² - ٢ × ٨ × ١٠ جتا ٥٠°

∴ ١ب = ٨ سم

فى المثلث ١م ء :

∵ ق(∠ ١م ء) = ١٨٠° - ٥٠° = ١٣٠°

∴ (١ء)² = (٨)² + (١٠)² - ٢ × ٨ × ١٠ جتا ١٣٠°

∴ ١ء = ١٦ سم

٢١

في Δ ا ب حـ :

∵ حتا ب = $\frac{(٩)^2 + (١٣)^2 - (٢٠)^2}{٢ \, (٩) \, (١٣)}$



∴ ق(∠ب) ≈ ١٢٩° ٥٢َ

∴ ق(∠ب ا ء) = ١٨٠° − ١٢٩° ٥٢َ ≈ ٥٠° ٨َ

في Δ ا ب ء :

(ب ء)^2 = (٩)^2 + (١٣)^2 − ٢ (٩) (١٣) × حتا ٥٠° ٨َ

∴ ب ء ≈ ١٠ سم

٢٢



نفرض أن ا ب = ٢ س

، ب حـ = ٣ س

، نصف محيط متوازى الأضلاع = ١٠ سم

∴ ٢ س + ٣ س = ١٠   ∴ س = ٢ سم

∴ ا ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم

في Δ ا ب ء : ∵ حتا ا = $\frac{(٤)^2 + (٦)^2 - (٨)^2}{٢ \, (٤) \, (٦)}$

∴ ق(∠ا) ≈ ١٠٤° ٢٩َ

∴ ق(∠ا ب حـ) = ١٨٠° − ١٠٤° ٢٩َ = ٧٥° ٣١َ

∴ (ا حـ)^2 = (٤)^2 + (٦)^2 − ٢ (٤) (٦) حتا ٧٥° ٣١َ

∴ ا حـ ≈ ٦,٣ سم

٢٣

نصف محيط متوازى الأضلاع = ٢٢ سم

بفرض أن : ا ب = س

∴ ا ء = ٢٢ − س



∴ في Δ ا ب ء :

∴ (ب ء)^2 = (س)^2 + (٢٢ − س)^2

− ٢ س (٢٢ − س) حتا ٦٠°

∴ ١٩٦ = ٣ س^2 − ٦٦ س + ٤٨٤

∴ ٣ س^2 − ٦٦ س + ٢٨٨ = ٠

∴ س^2 − ٢٢ س + ٩٦ = ٠

∴ (س − ٦) (س − ١٦) = ٠   ∴ س = ٦

∴ ا ب = ٦ سم ، ا ء = ١٦ سم

∴ $\frac{٦}{حا(∠ا ء ب)} = \frac{١٤}{حا ٦٠°}$

∴ حا(∠ا ء ب) = $\frac{٦ \, حا ٦٠°}{١٤}$

∴ ق(∠ا ء ب) = ٢١° ٤٧َ

، مساحة متوازى الأضلاع ا ب حـ ء

= ٢ مساحة المثلث ا ب ء

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ١٦ حا ٦٠° ≈ ٨٣ سم^2

٢٤

في Δ ا ب ء :



(ب ء)^2 = (٣٠)^2 + (٤٢)^2

− ٢ × ٣٠ × ٤٢ حتا ١٠٠°

∴ ب ء ≈ ٥٥,٧ سم

، حتا(∠ا ء ب) = $\frac{(٥٥,٧)^2 + (٤٢)^2 - (٣٠)^2}{٢ \times ٥٥,٧ \times ٤٢}$

≈ ٠,٨٤٨

، ∵ ا ء // ب حـ

∴ ق(∠ء ب حـ) = ق(∠ا ء ب) (بالتبادل)

∴ حتا(∠ء ب حـ) = ٠,٨٤٨

∴ (حـ ء)^2 = (٥٥,٧)^2 + (٤٨)^2 − ٢ × ٥٥,٧ × ٤٨ × ٠,٨٤٨

∴ حـ ء ≈ ٣٠ سم

٢٥

في Δ ا ب حـ :



حتا ب = $\frac{(٩)^2 + (٥)^2 - (١١)^2}{٢ \times ٩ \times ٥} = -\frac{١}{٣}$

، في Δ ا ء حـ :

حتا ء = $\frac{(٩)^2 + (٨)^2 - (١١)^2}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٣}$

∴ حتا ب + حتا ء = ٠

∴ ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°

∴ الشكل رباعى دائرى.

٢٦

∵ ا ب حـ ء

شكل رباعى دائرى



∴ حتا ب = − حتا ء

∴ $\frac{(٦)^2 + (٥)^2 - (ا حـ)^2}{٥ \times ٦ \times ٢} = \frac{-(٩)^2 - (٨)^2 + (ا حـ)^2}{٨ \times ٩ \times ٢}$

∴ $\frac{١٠٦ - (ا حـ)^2}{٥} = \frac{-١٤٥ + (ا حـ)^2}{٨}$

∴ ٨٤٨ − ٨ (ا حـ)^2 = −٧٢٥ + ٥ (ا حـ)^2

∴ ١٣ (ا حـ)^2 = ١٥٧٣   ∴ (ا حـ)^2 = ١٢١

∴ ا حـ = ١١ سم

٢٧

في المثلث ا ب حـ :



حتا(∠ب ا حـ)

= $\frac{(٦)^2 + (١٦)^2 - (١٤)^2}{٢ \times ٦ \times ١٦} = \frac{١}{٢}$

، في المثلث ب حـ ء :

حتا(∠ب ء حـ) = $\frac{(١٠)^2 + (١٦)^2 - (١٤)^2}{٢ \times ١٠ \times ١٦} = \frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ب ا حـ) = ق(∠ب ء حـ)

∴ الشكل رباعى دائرى.

٢٨

في Δ ا ء حـ



حتا(∠ء ا حـ)

= $\frac{(١٢)^2 + (١٨)^2 - (٨)^2}{٢ \times ١٢ \times ١٨} = \frac{١٠١}{١٠٨}$

∴ ق(∠ء ا حـ) ≈ ٢٠° ٤٥َ

، في Δ حـ ا ب

حتا(∠حـ ا ب) = $\frac{(٢٧)^2 + (١٨)^2 - (٢٣)^2}{٢ \, (٢٧) \, (١٨)} = \frac{١٠١}{١٠٨}$

∴ ق(∠ء ا حـ) = ق(∠حـ ا ب)

أى أن : $\overline{ا حـ}$ ينصف ∠ب ا ء

∴ مساحة الشكل ا ب حـ ء

= مساحة Δ ا ء حـ + مساحة Δ ا حـ ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٨ × حا ٢٠° ٤٥َ + $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٧ × حا ٢٠° ٤٥َ

= ١٢٤ سم^2

٢٩

في Δ ا ء ب :



ا ب = $\sqrt{(١٠)^2 - (٨)^2}$

= ٦ سم

، حتا ب = $\frac{٣}{٥}$ ∴ ق(∠ب) ≈ ٥٣° ٨َ

في Δ ء ب حـ : ب ء = $\frac{١}{٢}$ ء حـ

∴ ء حـ = ٢٠ سم ، ب حـ = ١٠$\sqrt{٣}$ سم

في Δ ا ب حـ :

ق(∠ا ب حـ) = ٩٠° + ٥٣° ٨َ = ١٤٣° ٨َ

∴ (ا حـ)^2 = (٦)^2 + (١٠$\sqrt{٣}$)^2

− ٢ (٦) (١٠$\sqrt{٣}$) حتا ١٤٣° ٨َ

∴ ا حـ ≈ ٢٢ سم

٣٠

∵ حـ^٢ = (٣ ب)^٢ + ب^٢ − ٢ × ٣ ب × ب × جتا ٦٠°

= ٧ ب^٢

∴ حـ = $\sqrt{٧}$ ب

∴ جتا ب = $\frac{\text{٧ ب}^٢ + \text{٩ ب}^٢ - \text{ب}^٢}{\text{٢} \times \sqrt{٧}\text{ ب} \times \text{٣ ب}} = \frac{١٥}{٦\sqrt{٧}} = \frac{٥}{٢\sqrt{٧}}$

∴ ق (∠ ب) ≃ ١٩° ٦َ

، ∵ ق (∠ ٤) + ق (∠ ب) = ١٢٠°

∴ ق (∠ ٤) = ١٠٠° ٥٤َ

٣١

∵ ١٠ $\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × حـ جا ١٢٠°

∴ حـ = ٨ سم

∴ ب^٢ = (٥)^٢ + (٨)^٢ − ٢ × ٥ × ٨ جتا ١٢٠° = ١٢٩

∴ ب = $\sqrt{١٢٩}$ ≃ ١١,٣٦ سم

∴ جتا ٤ = $\frac{١٢٩ + (٨)^٢ - (٥)^٢}{٢ \times \sqrt{١٢٩} \times ٨}$

∴ ق (∠ ٤) = ٢٢° ٢٥َ

٣٢

∵ ب : حـ = ٣ : ٤

ويفرض أن : ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

، ∵ مساحة Δ ٤ ب حـ = ٦٤

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٣ ك × ٤ ك × جا ٣٠° = ٦٤

∴ ك = $\frac{٨}{\sqrt{٣}}$ ∴ ب = $\frac{٢٤}{\sqrt{٣}}$ سم ، حـ = $\frac{٣٢}{\sqrt{٣}}$

∴ ٤^٢ = $(\frac{٣٢}{\sqrt{٣}})^٢ + (\frac{٢٤}{\sqrt{٣}})^٢$

− ٢ × $\frac{٣٢}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{٢٤}{\sqrt{٣}}$ × جتا ٣٠°

∴ ٤ = ٩,٥ سم

∴ محيط Δ ٤ ب حـ = ٤١,٨ سم

٣٣

مساحة Δ ٤ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ٤ ب ٤ حـ

∴ ٢٠ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ١٠ جا حـ

∴ جا حـ = $\frac{٢}{٣}$

∴ ق (∠ حـ) = ١٣٨° ١١َ (∠ حـ منفرجة)

∴ حـ^٢ = (٦)^٢ + (١٠)^٢ − ٢ × ٦ × ١٠ جتا ١٣٨° ١١َ

∴ حـ ≃ ١٥ سم

٣٤

∵ $\frac{\text{جا ٤}}{١} = \frac{\text{جا ب}}{١,٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٢}$

∴ ٤ : ب : حـ = ١ : ١,٥ : ٢

∴ ٤ = ك ، ب = ١,٥ ك ، حـ = ٢ ك

، ∵ حـ − ٤ = ٤ سم ∴ ٢ ك − ك = ٤

∴ ك = ٤

∴ ٤ = ٤ سم ، ب = ٦ سم ، حـ = ٨ سم

∴ جتا ٤ = $\frac{(٦)^٢ + (٨)^٢ - (٤)^٢}{٢ \times ٦ \times ٨} = \frac{٧}{٨}$

∴ ق (∠ ٤) = ٢٨° ٥٧َ ٦٨ً

٣٥

∵ جا ٤ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٥ : ٧

∴ ٤ : ب : حـ = ٣ : ٥ : ٧

ويفرض أن : ٤ = ٣ ك ، ب = ٥ ك ، حـ = ٧ ك

∴ جتا ٤ = $\frac{(\text{٥ ك})^٢ + (\text{٧ ك})^٢ - (\text{٣ ك})^٢}{٢ \times \text{٥ ك} \times \text{٧ ك}} = \frac{١٣}{١٤}$

، جتا ب = $\frac{(\text{٣ ك})^٢ + (\text{٧ ك})^٢ - (\text{٥ ك})^٢}{٢ \times \text{٣ ك} \times \text{٧ ك}} = \frac{١١}{١٤}$

، جتا حـ = $\frac{(\text{٣ ك})^٢ + (\text{٥ ك})^٢ - (\text{٧ ك})^٢}{٢ \times \text{٣ ك} \times \text{٥ ك}} = -\frac{١}{٢}$

∴ جتا ٤ : جتا ب : جتا حـ = $\frac{١٣}{١٤}$: $\frac{١١}{١٤}$: $\frac{١}{٢}$ = ١٣ : ١١ : −٧

① (ب) ② (جـ) ③ (د)

④ (جـ) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

٣٧

∵ محيط Δ ٤ ب حـ = ٧٠ سم

، ٤ = ٢٦ سم

∴ ب + حـ = ٧٠ − ٢٦

= ٤٤ سم



، بفرض ب = س

∴ حـ = ٤٤ − س

∴ (٢٦)^٢ = س^٢ + (٤٤ − س)^٢

− ٢ س (٤٤ − س) جتا ٦٠°

∴ س^٢ − ٤٤ س + ٤٢٠ = ٠

∴ (س − ٣٠) (س − ١٤) = ٠

∴ س = ٣٠ ، س = ١٤

ب حـ = ٣٠ × ١٤ = ٤٢٠

∴ مساحة Δ ٤ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا ٤

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٢٠ × جا ٦٠°

= ١٠٥ $\sqrt{٣}$ سم^٢

٣٨

∵ ٣٤ = ١٢ + (٦ + حـ) + حـ

∴ حـ = ٨ سم ، ب = ١٤ سم

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع وهو حـ

، ∵ جتا حـ = $\frac{(١٢)^٢ + (١٤)^٢ - (٨)^٢}{٢ \times ١٢ \times ١٤} = \frac{٢٣}{٢٨}$

∴ ق (∠ حـ) = ٣٤° ٤٦َ ١٩ً

، مساحة المثلث ٤ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٤ × جا ٣٤° ٤٦َ ١٩ً

= ٤٧,٩ سم^٢

٣٩

∵ س > ١٠

∴ أكبر الزوايا هي المقابلة للضلع الذي طوله ١٤ سم

∴ جتا ١٢٠° = $\frac{(١٠)^٢ + \text{س}^٢ - (١٤)^٢}{٢ \times ١٠ \times \text{س}}$

∴ $-\frac{١}{٢} = \frac{\text{س}^٢ - ٩٦}{\text{٢٠ س}}$

∴ − س^٢ + ٩٦ = ١٠ س

∴ س^٢ + ١٠ س − ٩٦ = ٠

(س + ١٦) (س − ٦) = ٠

∴ س = ٦ ، س = −١٦ (مرفوض)

٤٠

∵ جتا حـ = $\frac{٤^٢ + \text{ب}^٢ - \text{حـ}^٢}{\text{٢ ٤ ب}}$

∴ جتا ١٢٠° = $\frac{(\text{ب} - ٢)^٢ + \text{ب}^٢ - (\text{ب} + ٢)^٢}{٢ (\text{ب} - ٢) (\text{ب})}$

∴ $-\frac{١}{٢} = \frac{\text{ب}^٢ - ٤ \text{ب} + ٤ + \text{ب}^٢ - \text{ب}^٢ - ٤ \text{ب} - ٤}{٢ (\text{ب} - ٢) (\text{ب})}$

∴ −١ = $\frac{\text{ب}^٢ - ٨ \text{ب}}{\text{ب} (\text{ب} - ٢)}$ ∴ −١ = $\frac{\text{ب} (\text{ب} - ٨)}{\text{ب} (\text{ب} - ٢)}$

∴ ٢ − ب = ب − ٨ ∴ ٢ ب = ١٠

∴ ب = ٥ ∴ ٤ = ٣ ، حـ = ٧

٤١

∵ (٤ + ب + حـ) (٤ + ب − حـ) = ٣ ٤ ب

∴ (٤ + ب)^٢ − حـ^٢ = ٣ ٤ ب

∴ ٤^٢ + ب^٢ + ٢ ٤ ب − حـ^٢ = ٣ ٤ ب

∴ ٤^٢ + ب^٢ − حـ^٢ = ٤ ب وبقسمة الطرفين على ٢ ٤ ب

∴ $\frac{٤^٢ + \text{ب}^٢ - \text{حـ}^٢}{\text{٢ ٤ ب}} = \frac{١}{٢}$

∴ جتا حـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق (∠ حـ) = ٦٠°

٤٢

∵ $(أ + ب + ح)(أ + ب - ح) = ك\,أ\,ب$

∴ $(أ + ب)^{2} - ح^{2} = ك\,أ\,ب$

∴ $أ^{2} + ب^{2} + ٢\,أ\,ب - ح^{2} = ك\,أ\,ب$

∴ $\frac{أ^{2} + ب^{2} - ح^{2}}{٢\,أ\,ب} = \frac{(ك - ٢)\,أ\,ب}{٢\,أ\,ب}$

∴ جتا ح $= \frac{ك - ٢}{٢}$

، ∵ صفر < ق(∠ح) < ١٨٠°

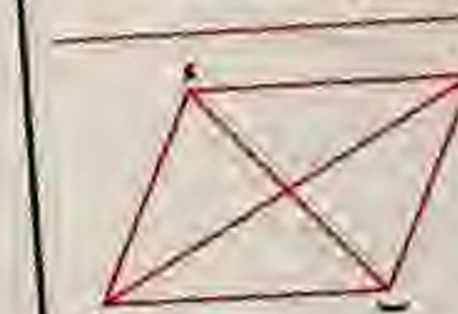
∴ −١ < جتا ح < ١ ∴ $-١ < \frac{ك - ٢}{٢} < ١$

∴ −٢ < ك − ٢ < ٢ ∴ صفر < ك < ٤

∴ ك ∈]٠ ، ٤[، عندما ك = ١

∴ جتا ح $= -\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠ح) = ١٢٠°

٤٣



من Δ أ ب ح :

$(أح)^{2} = (أب)^{2} + (بح)^{2}$
$- ٢\,(أب) \times (بح)$ جتا (∠أ ب ح) (١)

، من Δ ب ح ء :

$(بء)^{2} = (بح)^{2} + (ءح)^{2} - ٢\,(بح)$
$\times (ءح)$ جتا (∠ء ح ب)

، ∵ ء ح = أ ب ، جتا (∠ء ح ب) = − جتا (∠أ ب ح)

∴ $(بء)^{2} = (بح)^{2} + (أب)^{2} + ٢\,(بح)$
$\times (أب)$ جتا (∠أ ب ح) (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ $(أح)^{2} + (بء)^{2} = ٢\,(أب)^{2} + ٢\,(بح)^{2}$

٤٤



من Δ أ ب ء :

$(أب)^{2} = (أء)^{2} + (بء)^{2}$
$- ٢\,(أء)\,(بء)$ جتا (∠أ ء ب) (١)

من Δ أ ء ح :

$(أح)^{2} = (أء)^{2} + (حء)^{2}$
$- ٢\,(أء)\,(حء)$ جتا (∠أ ء ح)

، ∵ جتا (∠أ ء ب) = − جتا (∠أ ء ح) ، ح ء = ب ء (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ $(أب)^{2} + (أح)^{2} = ٢\,(أء)^{2} + ٢\,(بء)^{2}$

∴ $(٥)^{2} + (٨)^{2} = ٢\,(أء)^{2} + ٢\,(٦)^{2}$

∴ أ ء $= \frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ سم

٤٥

ظتا ب + ظتا ح $= \frac{جتا\,ب}{جا\,ب} + \frac{جتا\,ح}{جا\,ح}$

$= \frac{أ^{2} + ح^{2} - ب^{2}}{٢\,أ\,ح\,جا\,ب} + \frac{أ^{2} + ب^{2} - ح^{2}}{٢\,أ\,ب\,جا\,ح}$

$= \frac{أ^{2} + ح^{2} - ب^{2}}{٤\,\Delta} + \frac{أ^{2} + ب^{2} - ح^{2}}{٤\,\Delta}$

$= \frac{٢\,أ^{2}}{٤\,\Delta} = \frac{أ^{2}}{٢\,\Delta}$

٤٦

∵ $ب^{2} = ح^{2} - ٢\,ح\,أ + أ^{2} + ح\,أ$

∴ $ب^{2} = ح^{2} + أ^{2} - ح\,أ$

، ∵ $ب^{2} = ح^{2} + أ^{2} - ٢\,أ\,ح$ جتا ب

∴ ح أ = ٢ أ ح جتا ب ∴ جتا ب $= \frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ب) = ٦٠°

٤٧

في Δ س ص ع :

∵ $س^{2} = ص^{2} + ع^{2} - ٢\,ص\,ع$ جتا س

، ∵ $س^{2} = ص^{2} + ع^{2} - ص\,ع$ ظتا س

∴ ٢ جتا س = ظتا س

∴ ٢ جتا س $= \frac{جتا\,س}{جا\,س}$

∴ ٢ جتا س جا س − جتا س = ٠

∴ جتا س (٢ جا س − ١) = ٠

∴ إما جتا س = ٠ ومنها س = ٩٠°

أو جا س $= \frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠° أو ١٥٠°

∴ ق(∠س) = ٩٠° أو ٣٠° أو ١٥٠°

٤٨

∵ جتا ب $= \frac{أ^{2} + ح^{2} - ب^{2}}{٢\,أ\,ح}$

∴ $\frac{ح}{٢\,أ} = \frac{أ^{2} + ح^{2} - ب^{2}}{٢\,أ\,ح}$

∴ $ح^{2} = أ^{2} + ح^{2} - ب^{2}$

∴ $أ^{2} = ب^{2}$ ∴ أ = ب

∴ Δ أ ب ح متساوي الساقين.

٤٩



∵ أ ب ح ء هـ خماسي منتظم

∴ ق(∠ب) = ١٠٨°

∴ $(أح)^{2}$

$= (١٨,٢٦)^{2} + (١٨,٢٦)^{2}$

$- ٢\,(١٨,٢٦)\,(١٨,٢٦) \times$ جتا ١٠٨°

∴ أ ح ≃ ٢٩,٥ سم

٥٠

حل زياد خطأ لأن قانون الجيب يجعل جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجبًا رغم أن الزاوية هنا منفرجة ويؤكد ذلك استخدام قاعدة جيب التمام في حل كريم.

٥١

① (ب) ② (د) ③ (ب) ④ (ب)
⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (ح) ⑧ (د)
⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (أ)

إرشادات لحل رقم ٥١

① ∵ أ ب $= \sqrt{(٣ - ٠)^{2} + (٤ - ١)^{2}} = ٣\sqrt{٢}$

، ب ح $= \sqrt{(١ - ٢)^{2} + (٣ - ٤)^{2}} = \sqrt{٥}$

، أ ح $= \sqrt{(١ - ٠)^{2} + (٣ - ١)^{2}} = \sqrt{٥}$

∴ جتا (∠أ ح ب)

$= \frac{(\sqrt{٥})^{2} + (\sqrt{٥})^{2} - (٣\sqrt{٢})^{2}}{٢ \times \sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}$

$= \frac{-٤}{٥}$

② • إذا علم طول $\overline{أب}$ تعين ق(∠أ ح ب) وبالتالي ق(∠ء ح هـ) ، طول $\overline{ءهـ}$

• إذا علم مساحة Δ أ ب ح تعين ق(∠أ ح ب) وبالتالي ق(∠ء ح هـ) ، طول $\overline{ءهـ}$

• إذا علم محيط Δ أ ب ح كم طول $\overline{أب}$ وبالتالي تعين ق(∠أ ح ب) ، ق(∠ء ح هـ) ، طول $\overline{ءهـ}$

∴ معرفة أي مما سبق يصلح لإيجاد طول $\overline{ءهـ}$

③ ∵ $(أب)^{2} = (٥)^{2} + (٦)^{2} - ٢ \times ٥ \times ٦$ جتا θ (١)

، $(أح)^{2} = (٥)^{2} + (٤)^{2}$
$- ٢ \times ٥ \times ٤$ جتا (١٨٠° − θ) (٢)

، ∵ أ ب = أ ح

ومن (١) ، (٢) :



∴ ٢٥ + ٣٦ − ٦٠ جتا θ
= ٢٥ + ١٦ + ٤٠ جتا θ

∴ ١٠٠ جتا θ = ٢٠ ∴ جتا θ $= \frac{١}{٥}$

∴ $(أب)^{2} = ٢٥ + ٣٦ - ٦٠ \times \frac{١}{٥} = ٤٩$

∴ أ ب = ٧ سم

④ ∵ [illegible]

∴ $جتا ٢ أ = - جتا ح$

∴ فى Δ أ ب ء :

$(ب ء)^{٢} = (٣)^{٢} + (٢)^{٢} - ٢ × ٣ × ٢$ جتا أ (١)

، فى Δ ح ب ء :

$(ب ء)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} - ٢ × ٣ × ٤$ جتا ح (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ٩ + ٤ - ١٢ جتا أ = ٩ + ١٦ + ٢٤ جتا أ

∴ ٣٦ جتا أ = - ١٢ ∴ جتا أ = $-\frac{١}{٣}$

⑤ ∵ $\overline{أ ح}$ ، $\overline{ء ب}$ وتران متقاطعان فى الدائرة فى النقطة هـ

∴ أ هـ × هـ ح = ء هـ × هـ ب

∴ ٣ × ٤ = ٢ × هـ ب ∴ هـ ب = ٦ سم

∴ جتا (∠ ب أ هـ) = $\frac{(٣)^{٢} + (٨)^{٢} - (٦)^{٢}}{٢ × ٣ × ٨} = \frac{٣٧}{٤٨}$

∴ ق (∠ ب أ هـ) = ٣٩ َ ٣٤ °

⑥ فى Δ أ ب ح :

∵ $(أ ب)^{٢} = (٦)^{٢} + (١٢)^{٢} - ٢ × ٦ × ١٢ ×$ جتا (٠,٤)^{ء}

∴ أ ب = ٦,٩ سم

، ∵ هـ^{ء} = $\frac{ل}{نق}$

∴ طول $\frown{ب ء}$ = ٠,٤ × ٦ = ٢,٤ سم

∴ محيط الجزء المظلل = ٦,٩ + ٢,٤ + ٦ = ١٥,٣

⑦ ∵ جتا أ = $\frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب ح}$

∴ $ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢} = ٢ ب ح$ جتا أ

∴ $(ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢})$ ظا أ

= ٢ ب ح جتا أ × $\frac{جا أ}{جتا أ}$ = ٢ ب ح جا أ

= ٤ × ($\frac{١}{٢}$ ب ح جا أ) = ٤ × ١٢ = ٤٨

⑧ (١ + $\frac{ب}{ح}$ + $\frac{أ}{ح}$) (١ + $\frac{ح}{ب}$ - $\frac{أ}{ب}$)

= $\left(\frac{ح + ب + أ}{ح}\right) \left(\frac{ب + ح - أ}{ب}\right)$

= $\frac{(ب + ح)^{٢} - أ^{٢}}{ب ح} = \frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢} + ٢ ب ح}{ب ح}$

= $\frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}{ب ح} + ٢$

= ٢ جتا أ + ٢ = ٢ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ + ٢ = ٣

⑨ ∵ $\frac{أ^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣}}{أ + ب + ح} = أ^{٢}$

∴ $أ^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣} = أ^{٣} + ب أ^{٢} + ح أ^{٢}$

∴ $ب^{٣} + ح^{٣} = ب أ^{٢} + ح أ^{٢}$

∴ $(ب + ح) (ب^{٢} - ب ح + ح^{٢}) = أ^{٢} (ب + ح)$

∴ $أ^{٢} = ب^{٢} - ب ح + ح^{٢}$

∴ $ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢} = ب ح$

∴ $\frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب ح} = \frac{١}{٢}$ ∴ جتا أ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ أ) = ٦٠°

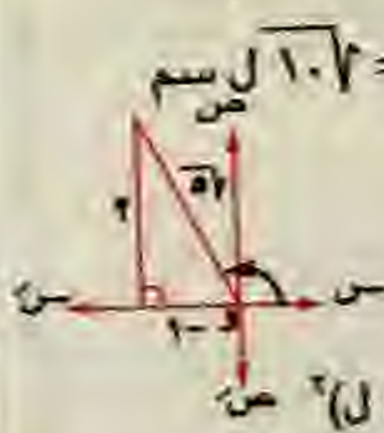
⑩ بفرض طول ضلع المربع الصغير = ل سم

∴ طول ضلع المربع الأكبر = ٢ ل سم

∴ س هـ = $\sqrt{ل^{٢} + ل^{٢}} = \sqrt{٢}$ ل سم

، ب س = $\sqrt{ل^{٢} + (٣ ل)^{٢}} = \sqrt{١٠}$ ل سم

، ب هـ = ٤ ل سم



∴ جتا (∠ ب س هـ)

= $\frac{(\sqrt{٢} ل)^{٢} + (\sqrt{١٠} ل)^{٢} - (٤ ل)^{٢}}{٢ × \sqrt{٢} ل × \sqrt{١٠} ل}$

= $\frac{- ٤ ل^{٢}}{٤ \sqrt{٥} ل^{٢}} = \frac{- ١}{\sqrt{٥}}$

∴ جا (∠ ب س هـ) = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

⑪ ∵ [illegible]

، ∵ محيط Δ أ ح ء = محيط Δ أ ب ء

∴ أ ح + ح ء = أ ب + ب ء (لأن $\overline{أ ء}$ مشترك)

∴ ٨٠ + ح ء = ٦٠ + (١٠٠ - ح ء)

∴ ٢ ح ء = ٨٠

∴ ح ء = ٤٠ سم ، ب ء = ٦٠ سم

فى Δ أ ب ء :

∴ $(أ ء)^{٢} = (٦٠)^{٢} + (٦٠)^{٢} - ٢ (٦٠) (٦٠)$ جتا ب

∵ جتا ب = $\frac{٦٠}{١٠٠}$ = ٠,٦

∴ $(أ ء)^{٢}$ = ٣٦٠٠ + ٣٦٠٠ - ٢ × ٣٦٠٠ × ٠,٦

∴ أ ء = ٢٤ $\sqrt{٥}$ سم

٥٢

∴ $\frac{أ^{٢} + ح^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ^{٢} ح} = \frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب^{٢} ح}$

∴ $أ^{٢} ب^{٢} + ب^{٢} ح^{٢} - ب^{٤} = أ^{٢} ب^{٢} + أ^{٢} ح^{٢} - أ^{٤}$

∴ $(أ^{٢} - ب^{٢}) ح^{٢} - (أ^{٢} - ب^{٢}) (أ^{٢} + ب^{٢}) = ٠$

∴ $(أ^{٢} - ب^{٢}) (ح^{٢} - أ^{٢} - ب^{٢}) = ٠$

∴ $أ^{٢} = ب^{٢}$ أ، $ح^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$

∴ أ = ب أى المثلث أ ب ح متساوى الساقين

أ، المثلث أ ب ح قائم الزاوية فى ح

٥٣

∵ ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ أ هـ ح)

= ق (∠ ب هـ ح) = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠°

فى Δ أ ب هـ :

$(أ ب)^{٢}$ = ٣٦ + ١٠٠ - ٢ × ٦ × ١٠ × جتا ١٢٠°

∴ أ ب = ١٤ سم

ويفرض هـ ح = س



فى Δ أ هـ ح :

$(أ ح)^{٢}$ = ١٠٠ + $س^{٢}$ - ٢ × ١٠ × س جتا ١٢٠°

∴ $(أ ح)^{٢}$ = ١٠٠ + $س^{٢}$ + ١٠ س

فى Δ ب هـ ح :

$(ب ح)^{٢}$ = ٣٦ + $س^{٢}$ - ٢ × ٦ × س جتا ١٢٠°

∴ $(ب ح)^{٢}$ = ٣٦ + $س^{٢}$ + ٦ س

، من Δ أ ب ح : $(أ ح)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب ح)^{٢}$

∴ ١٠٠ + $س^{٢}$ + ١٠ س = ١٩٦ + ٣٦ + $س^{٢}$ + ٦ س

∴ ٤ س = ١٣٢ ∴ س = ٣٣ سم

∴ هـ ح = ٣٣ سم

٥٤

بفرض أن :

، أ م = م ن = ن ح = س

، أ ب = ص



من Δ أ ب م :

جتا أ = $\frac{ص^{٢} + س^{٢} - ٩}{٢ س ص}$

∴ $\frac{ص}{٣ س} = \frac{ص^{٢} + س^{٢} - ٩}{٢ س ص}$

∴ $٢ ص^{٢} = ٣ ص^{٢} + ٣ س^{٢} - ٢٧$

∴ $ص^{٢} + ٣ س^{٢} = ٢٧$ (١)

من Δ أ ب ن :

جتا أ = $\frac{ص^{٢} + ٤ س^{٢} - ١٦}{٢ × ص × ٢ س}$

∴ $\frac{ص}{٣ س} = \frac{ص^{٢} + ٤ س^{٢} - ١٦}{٤ س ص}$

∴ $٤ ص^{٢} = ٣ ص^{٢} + ١٢ س^{٢} - ٤٨$

∴ $- ص^{٢} + ١٢ س^{٢} = ٤٨$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ١٥ س^٢ = ٧٥ ∴ س^٢ = ٥ ∴ س = $\sqrt{٥}$ سم

وبالتعويض في (١) :

∴ ص^٢ + ١٥ = ٢٧ ∴ ص^٢ = ١٢

∴ ص = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

∴ ب حـ = $\sqrt{(٢\sqrt{٥})^٢ - ١٢}$ = $\sqrt{٣٢}$

∴ محيط Δ أ ب حـ = أ ب + ب حـ + أ حـ

= ٢ $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٣٢}$ + ٢ $\sqrt{٥}$ ≈ ١٦ سم

٥٥

① ∵ $\frac{جتا أ}{أ} = \frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ × أ}$

، $\frac{جتا ب}{ب} = \frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ حـ × ب}$ ، $\frac{جتا حـ}{حـ} = \frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب × حـ}$

∴ $\frac{جتا أ}{أ} + \frac{جتا ب}{ب} + \frac{جتا حـ}{حـ}$

= $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢ + أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢ + أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب حـ}$

= $\frac{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}{٢ أ ب حـ}$

② ∵ أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢ - ٢ ب حـ جتا أ ، ب^٢ = أ^٢ + حـ^٢ - ٢ أ حـ جتا ب

، حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ - ٢ أ ب جتا حـ

∴ أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢

= ٢ أ^٢ + ٢ ب^٢ + ٢ حـ^٢ - ٢ ب حـ جتا أ - ٢ أ حـ جتا ب - ٢ أ ب جتا حـ

∴ أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢

= ٢ (ب حـ جتا أ + أ حـ جتا ب + أ ب جتا حـ)

③ $\frac{جا أ}{جا حـ} = \frac{جا أ}{جا حـ} ، \frac{جتا حـ}{جتا أ} = \frac{جا أ}{جا حـ} × \frac{جتا حـ}{جتا أ}$

= $\frac{أ}{حـ} × \frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب} × \frac{٢ ب حـ}{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}$

= $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}$

إجابات تمارين 21

أولاً

١

ق(∠ب) = ١٨٠° - (٦٧° + ٤٦°) = ٦٧°

∴ $\frac{أ}{جا ٦٧°} = \frac{١١}{جا ٦٧°} = \frac{حـ}{جا ٤٦°}$

∴ أ = ١١ سم ، حـ = ٨٫٦ سم

٢

ق(∠م) = ١٨٠° - (٦٦° ٣٣َ + ١٩° ٤٤َ) = ١٠٢° ٢٥َ

∴ $\frac{ل}{جا ٦٦° ٣٣َ} = \frac{١٧}{جا ١٠٢° ٢٥َ} = \frac{ن}{جا ١٩° ٤٤َ}$

∴ ل = ٩٫٥ سم ، ن = ١٢٫٢ سم

٣

ق(∠أ) = ٨٠° ، ق(∠ب) = ٤٠°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° - (٨٠° + ٤٠°) = ٦٠°

∴ $\frac{ب حـ}{جا ٨٠°} = \frac{أ حـ}{جا ٤٠°} = \frac{٩}{جا ٦٠°}$

∴ ب حـ = ١٠٫٢ سم ، أ حـ = ٦٫٧ سم

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × أ حـ × جا حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٫٢ × ٦٫٧ × جا ٦٠°

= ٣٠ سم^٢

٤

ق(∠ع) = ١٨٠° - (١٢° ٧٥َ + ١٥° ٤٨َ) = ٣٣° ٥٦َ

∴ $\frac{ص ع}{جا ١٢° ٧٥َ} = \frac{س ع}{جا ١٥° ٤٨َ} = \frac{١٠}{جا ٣٣° ٥٦َ}$

∴ ص ع = ٤٦٫٤ سم ، س ع = ٢٥٫٨ سم

، الارتفاع المطلوب = ص ع × جا ص

= ٤٦٫١ جا ١٥° ٤٩َ = ٣٤٫٦ سم

ثانياً

٥

حـ^٢ = (٥)^٢ + (٧)^٢ - ٢ (٥) (٧) جتا ٦٥°

∴ حـ = ٦٫٧ سم

∴ جتا ب = $\frac{(٥)^٢ + (٦٫٧)^٢ - (٧)^٢}{٢ × ٥ × ٦٫٧}$

∴ ق(∠ب) = ٧١° ٥َ

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° - (٧١° ٥َ + ٦٥°) = ٤٣° ٦َ

٦

أ^٢ = (٦)^٢ + (٦)^٢ - ٢ × ٦ × ٦ × جتا ١٢٦° ٥٢َ

∴ أ = ١١٫٦٧ سم

، ق(∠ب) = ق(∠حـ) = $\frac{١٨٠° - ١٢٦° ٥٢َ}{٢}$ = ٢٤° ١٣َ

٧

ق(∠م) = ٢٠° ٦١ = ٤٤° ٦٨َ

∴ م^٢ = (١٢٫٥)^٢ + (٧٫٢٥)^٢ - ٢ × ١٢٫٥

× ٧٫٢٥ جتا ٦٨° ٤٤َ

∴ م = ١١٫٦٩ سم

∴ جتا ل = $\frac{(١١٫٩٦)^٢ + (٧٫٢٥)^٢ - (١٢٫٥)^٢}{٢ × ١١٫٩٦ × ٧٫٢٥}$

∴ ق(∠ل) = ٧٦° ٥٣َ

∴ ق(∠ن) = ١٨٠° - (٦٨° ٤٤َ + ٧٦° ٥٣َ)

= ٣٤° ٢٣َ

٨

(ل ن)^٢ = (٤٨٫٥)^٢ + (٤٦)^٢ - ٢ × ٤٨٫٥ × ٤٦

× (-٠٫٦)

∴ ل ن = ٨٤٫٥٣ سم

، جتا ل = $\frac{(٤٨٫٥)^٢ + (٨٤٫٥٣)^٢ - (٤٦)^٢}{٢ × ٤٨٫٥ × ٨٤٫٥٣}$

∴ ق(∠ل) = ٤٨° ٢٥َ ، ق(∠م) = ٥٣° ١٣٦َ

∴ ق(∠ن) = ٢٠° ٣٧َ

ثالثاً

٩

① جتا أ = $\frac{(٢٧)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٥)^٢}{٢ × ٢٧ × ٢٤}$

∴ ق(∠أ) = ٣٣° ٣٢َ

، جتا ب = $\frac{(١٥)^٢ + (٢٧)^٢ - (٢٤)^٢}{٢ × ١٥ × ٢٧}$

∴ ق(∠ب) = ٦٢° ١١َ

، ق(∠حـ) = ١٨٠° - (٣٣° ٣٢َ + ٦٢° ١١َ) = ٨٤° ١٦َ

② جتا أ = $\frac{(٢٥)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٨)^٢}{٢ × ٢٥ × ١٧}$

∴ ق(∠أ) = ٥٢° ٦٠َ

، جتا ب = $\frac{(٢٨)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٥)^٢}{٢ × ٢٨ × ١٧}$

∴ ق(∠ب) = ٩٩° ١١َ ، ق(∠حـ) = ٢٩° ٤٨َ

١٠

جتا أ = $\frac{(١٤)^٢ + (١٥)^٢ - (١٣)^٢}{٢ × ١٤ × ١٥}$

∴ ق(∠أ) = ٥٣° ٨َ

، جتا ب = $\frac{(١٥)^٢ + (١٣)^٢ - (١٤)^٢}{٢ × ١٥ × ١٣}$

∴ ق(∠ب) = ٥٩° ٢٩َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° - (٥٣° ٨َ + ٥٩° ٢٩َ) = ٦٧° ٢٣َ

١١

جتا أ = $\frac{(٨)^٢ + (٤)^٢ - (٥)^٢}{٢ (٨) (٤)}$

∴ ق(∠أ) = ٣٠° ١٥َ

∴ ق(د أ) = ٤٥ َ٣٠° ∴ ل م ≃ ٨٤,٥٣ سم

، جتا ب = ...

∴ ق(د ب) = ٩ َ١٢٥°

∴ ق(د حـ) = ١٨٠° − (٤٥ َ٣٠° + ٩ َ١٢٥°) = ٩ َ٢٤°

١٢

جتا أ = ((٤ √٢)² + (٢ √٥)² − (٢)²) / (٢ × ٤ √٢ × ٢ √٥)

∴ ق(د أ) ≃ ٢٦ َ١٨°

، جتا ب = ((٢)² + (٢ √٥)² − (٤ √٢)²) / (٢ × ٢ × ٢ √٥)

∴ ق(د ب) ≃ ٣٤ َ١١٦°

∴ ق(د حـ) = ١٨٠° − (٢٦ َ١٨° + ٣٤ َ١١٦°) = ٤٥°

رابعًا: مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

١٣

١٠ / جا أ = ٩ / جا ٥٧° = حـ / جا حـ ∴ جا أ = ١٠ جا ٥٧° / ٩

∴ ق(د أ) = ٤٤ َ٦٨° أ، ق(د أ) = ١٦ َ١١١°

ومنها ق(د حـ) = ١٦ َ٥٤° أ، ق(د حـ) = ٤٤ َ١١°

، ∵ ٩ / جا ٥٧° = حـ / جا حـ

∴ حـ = ٨,٧ سم أ، حـ = ٢,٢ سم

١٤

٤ / جا ٥٠° = ٣ / جا ب = حـ / جا حـ ∴ جا ب = ٣ جا ٥٠° / ٤

∴ ق(د ب) = ٤ َ٣٥°

أ، ق(د ب) = ٥٦ َ١٤٤° (مرفوض)

∴ ق(د حـ) = ٥٦ َ٩٤°

∴ حـ / جا ٥٦ َ٩٤° = ٤ / جا ٥٠° ∴ حـ = ٥,٢ سم

١٥

١٢ / جا ١١٦° = ١٠ / جا أ = ب / جا ب ∴ جا أ = ١٠ جا ١١٦° / ١٢

∴ ق(د أ) = ٣٠ َ٤٨°

أ، ق(د أ) = ٣٠ َ١٣١° (مرفوض)

، ق(د ب) = ١٨٠° − (٣٠ َ٤٨° + ١١٦°) = ٣٠ َ١٥°

∴ ب / جا ٣٠ َ١٥° = ١٢ / جا ١١٦° ∴ ب = ٣,٦ سم

١٦

① ∵ د أ منفرجة ، أ > ب ∴ يوجد حل وحيد.

∴ ١٥ / جا ١٢٠° = ١٠ / جا ب ∴ جا ب = ١٠ جا ١٢٠° / ١٥

∴ ق(د ب) ≃ ٣٥°

، ق(د حـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ١٢٠°) = ٢٥°

∴ حـ / جا ٢٥° = ١٥ / جا ١٢٠° ∴ حـ ≃ ٧,٣ سم

② ∵ د حـ منفرجة ، حـ > أ ∴ يوجد حل وحيد

∴ ١٦ / جا ١١٥° = ٤ / جا أ ∴ جا أ = ٤ جا ١١٥° / ١٦

∴ ق(د أ) = ١٣°

، ق(د ب) = ١٨٠° − (١١٥° + ١٣°) = ٥٢°

، ١٦ / جا ١١٥° = ب / جا ٥٢° ∴ ب ≃ ١٣,٩ سم

③ ∵ د أ منفرجة ، أ < ب

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

④ ∵ د أ حادة ، ع = ٢٨ جا ٤٢° ≃ ١٨,٧ سم

، ١٨,٧ < ٢٠ < ٢٨ ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ ٢٠ / جا ٤٢° = ٢٨ / جا ب

∴ ق(د ب) = ٧٠° أ، ق(د ب) = ١١٠°

∴ ق(د حـ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٤٢°) = ٦٨°

أ، ق(د حـ) = ١٨٠° − (١١٠° + ٤٢°) = ٢٨°

، ∵ حـ / جا حـ = ٢٠ / جا ٤٢°

∴ حـ = ٢٧,٧ سم أ، حـ = ١٤ سم

⑤ ∵ د أ حادة ...

∴ أ < ع

∴ الشروط لاتحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

⑥ ∵ د أ حادة ، أ > حـ ∴ يوجد حل وحيد.

∴ ١٢ / جا ٢٧° = ٧ / جا حـ ∴ ق(د حـ) ≃ ١٥°

∴ ق(د ب) = ١٨٠° − (١٥° + ٢٧°) = ١٣٨°

∴ ب / جا ١٣٨° = ١٢ / جا ٢٧° ∴ ب ≃ ١٧,٧ سم

⑦ ∵ د ب حادة ، ع = ٤ √٣ جا ٦٠° = ٦ سم

∵ ع = ب

∴ يوجد مثلث وحيد قائم الزاوية.

∴ ٦ / جا ٦٠° = ٤ √٣ / جا أ ∴ ق(د أ) = ٩٠°

∴ ق(د حـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٠°) = ٣٠°

∴ حـ / جا ٣٠° = ٦ / جا ٦٠° ∴ حـ ≃ ٣,٥ سم

⑧ ∵ د أ حادة ، ع = ٨ جا ٤٧° ≃ ٥,٩ سم

∴ ع < أ < ب ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ ٦ / جا ٤٧° = ٨ / جا ب

∴ ق(د ب) ≃ ٧٧° أ، ق(د ب) ≃ ١٠٣°

∴ ق(د حـ) = ١٨٠° − (٤٧° + ٧٧°) = ٥٦°

أ، ق(د حـ) = ١٨٠° − (٤٧° + ١٠٣°) = ٣٠°

، ∵ حـ / جا حـ = ٦ / جا ٤٧° ∴ حـ ≃ ٦,٨ سم

أ، حـ ≃ ٤,١ سم

١٧

∵ د ب حادة ، ع = ٤٢ جا ٥٨° ≃ ٣٥,٦٢ سم

∴ لا يكون للمثلث حل إذا كان ٠ < ب < ٣٥,٦٢ سم

١٨

∵ Δ أ ب حـ متساوى الساقين ، ق(د أ) = ١١٠°

∴ ق(د ب) = ق(د حـ) = (١٨٠° − ١١٠°) / ٢ = ٣٥°

∴ ٨ / جا ١١٠° = ب / جا ٣٥° = حـ / جا ٣٥°

∴ ب = حـ = ٤,٩ سم

١٩

∵ جتا ب = ٣/٥ (موجبة)

∴ د ب حادة

∴ ق(د ب) ≃ ٨ َ٥٣° ، ق(د حـ) = ٣٧ َ٢٢°

∴ ق(د أ) = ١٥ َ١٠٤°

∴ ٢١ / جا ١٥ َ١٠٤° = ب / جا ٨ َ٥٣° = حـ / جا ٣٧ َ٢٢°

∴ ب = ١٧,٣ سم ، حـ ≃ ٨,٣ سم

٢٠

∵ مساحة المثلث أ ب حـ = ١/٢ أ حـ جا ب

∴ ١٠ √٣ = ١/٢ × ٥ حـ جا ١٢٠°

∴ حـ = ٨ سم

∴ ب² = (٥)² + (٨)² − ٢ × ٥ × ٨ جتا ١٢٠°

∴ ب = ١١,٣٦ سم

∴ جتا أ = ((١١,٣٦)² + (٨)² − (٥)²) / (٢ × ١١,٣٦ × ٨)

∴ ق(د أ) ≃ ٢٤ َ٢٢° ∴ ق(د حـ) = ٣٦ َ٣٧°

٢١

ق(د أ) = ٤/١٥ × ١٨٠° = ٤٨°

، ق(د ب) = ٥/١٥ × ١٨٠° = ٦٠°

، ق(د حـ) = ٦/١٥ × ١٨٠° = ٧٢°

، ∵ أ/جا أ = ب/جا ب = جـ/جا جـ = (أ + ب + جـ)/(جا أ + جا ب + جا جـ)

∴ أ/جا ٤٨° = ب/جا ٦٠° = جـ/جا ٧٢° = ٥٠/٢,٥٦

∴ أ = ١٤,٥ سم ، ب = ١٦,٩ سم ، جـ = ١٨,٦ سم

٢٢

بفرض أن

جا أ = ٣ك ، جا ب = ٤ك ، جا جـ = ٦ك

∴ أ/٣ك = ب/٤ك = جـ/٦ك = (أ + ب + جـ)/١٣ك

∴ أ/٣ = ب/٤ = جـ/٦ = ٥٢/١٣

∴ أ = ١٢ سم ، ب = ١٦ سم ، جـ = ٢٤ سم

∴ جتا أ = ((١٦)² + (٢٤)² − (١٢)²)/(٢ × ١٦ × ٢٤)

∴ ق(∠أ) = ٢٦° ٢٣َ

، جتا ب = ((١٢)² + (٢٤)² − (١٦)²)/(٢ × ١٢ × ٢٤)

∴ ق(∠ب) = ٣٦° ٢٠َ ∴ ق(∠جـ) = ١١٧° ١٧َ

٢٣

٢١/جا أ = ٢٥/جا ب = جـ/جا جـ = ٢٨

∴ ق(∠أ) = ٤٨° ٣٥َ ، ق(∠ب) = ٦٣° ١٤َ

∴ ق(∠جـ) = ٦٨° ١١َ

∴ جـ = ٢٨ جا ٦٨° ١١َ = ٢٦ سم

٢٤

أ/جا ٨٢° = ب/جا ب = ٥/جا جـ = ١٦ ∴ أ = ١٥,٨ سم

، ∵ أ > جـ ∴ ∠جـ حادة.

، ∵ جا جـ = ٥/١٦ ∴ ق(∠جـ) = ١٨° ١٣َ

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٨٢° + ١٨° ١٣َ) = ٧٩° ٤٧َ

∴ ب = ١٦ جا ٧٩° ٤٧َ = ١٥,٧ سم

٢٥

∵ ٢ × ٢٢/٧ × نق = ٤٤ ∴ ٢ نق = ١٤

∴ ٧/جا أ = ب/جا ٤٠° = جـ/جا جـ = ١٤

∴ ب = ١٤ جا ٤٠° = ٩ سم

، ∵ ب > أ ∴ ∠أ حادة.

، ∵ جا أ = ٧/١٤ ∴ ق(∠أ) = ٣٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٠°) = ١١٠°

∴ جـ = ١٤ جا ١١٠° = ١٣ سم

٢٦

ق(∠ص) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

∴ سَ/جا ٨٢° = صَ/جا ٤٢° = عَ/جا ٥٦° = ك

∴ سَ = ك جا ٨٢° ، صَ = ك جا ٤٢°

∴ ٩٠٠ = ½ (ك جا ٨٢°)(ك جا ٤٢°) جا ٥٦°

∴ ك ≃ ٥٧ ويرفض الحل السالب.

∴ سَ = ٥٦ سم ، صَ = ٣٨ سم ، عَ = ٤٧ سم

٢٧

ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ٧٥°) = ٧٠°

∴ أ/جا ٣٥° = ب/جا ٧٥° = جـ/جا ٧٠° = (أ + ٢جـ)/(جا ٣٥° + ٢ جا ٧٠°)

= ٢٥/(جا ٣٥° + ٢ جا ٧٠°)

∴ أ = ٤,٢ سم ، ب = ٧,١ سم ، جـ = ٦,٩ سم

٢٨

∵ أ/جا أ = ٢ نق ∴ ١٣/جا أ = ١٦

∴ ق(∠أ) = ٥٤° ٢٠َ ، أو ١٢٥° ٤٠َ

عندما ق(∠أ) = ٥٤° ٢٠َ

∴ ق(∠جـ) = ٨٣° ٤٠َ

∴ ١٣/جا ٥٤° ٢٠َ = ب/جا ٤٢° = جـ/جا ٨٣° ٤٠َ

∴ ب = ١٠,٧ سم ، جـ = ١٥,٩ سم

عندما ق(∠أ) = ١٢٥° ٤٠َ

∴ ق(∠جـ) = ١٢° ٢٠َ

∴ ١٣/جا ١٢٥° ٤٠َ = ب/جا ٤٢° = جـ/جا ١٢° ٢٠َ

∴ ب = ١٠,٧ سم ، جـ = ٣,٤ سم

٢٩

① جتا أ = ((٧,٦٣)² + (٦,٤)² − (٣,٢)²)/(٢ × ٧,٦٣ × ٦,٤)

∴ ق(∠أ) = ٢٤° ٢٤َ

، جتا ب = ((٣,٢)² + (٦,٤)² − (٧,٦٣)²)/(٢ × ٣,٢ × ٦,٤)

∴ ق(∠ب) = ٩٩° ٥٢َ

∴ ق(∠جـ) = ٥٥° ٤٤َ

② جـ² = (١٢)² + (٢١)² − ٢ × ١٢ × ٢١ × جتا ٩٥°

∴ جـ = ٢٥,٠٧٨ سم

، ∵ ٢٥,٠٧٨/جا ٩٥° = ١٢/جا أ = ٢١/جا ب

∴ ق(∠أ) = ٢٨° ٢٨َ ، ق(∠ب) = ٥٦° ٣٢َ

③ لا يمكن تكوين المثلث لأن أ + جـ = ب

④ ق = ١٠ جا ٤٢° = ٦,٦٩ سم

∴ ق < أ < ب

∴ يوجد حلان للمثلث

∴ ٩/جا ٤٢° = ١٠/جا ب = جـ/جا جـ

∴ ق(∠ب) = ٤٧° ٥٥َ

ومنها ق(∠جـ) = ٩٠° ٥َ

، جـ = ١٣,٥ سم

أو ق(∠ب) = ١٣٢° ٥َ

منها ق(∠جـ) = ٥° ٥٥َ

، جـ = ١,٤ سم

٣٠

① (أ) ② (جـ) ③ (أ)

إرشادات لحل رقم ٣٠

① ∵ أ/جا أ = ب/جا ب ∴ [illegible]

∴ جا ب = [illegible] (مرفوض)

∴ الشروط لا تتحقق بوجود أي مثلث على الإطلاق

∴ عدد المثلثات = صفر

② ∵ ٨ جا ٤٠° = ب جا أ ∴ ب جا أ < أ < ب

∴ يمكننا رسم مثلثين

③ ∵ ٨ جا ٤٠° = ب جا أ ∴ أ < ب جا أ

∴ لا يمكن رسم المثلث.

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الرابعة

١

$\because$ ق(∠ب) = ١٨٠° − (١٠٨° + ٥٢°) = ٢٠°

$\therefore \frac{أحـ}{جا ٢٠°} = \frac{١٦٠}{جا ٥٢°} = \frac{ب حـ}{جا ١٠٨°}$

$\therefore$ أحـ ≃ ٦٩ كم ، ب حـ ≃ ١٩٣ كم

أي أن : المسافة بين أ ، حـ ≃ ٦٩ كم

، المسافة بين ب ، حـ ≃ ١٩٣ كم

٢

في △ أ ب حـ :

① ق(∠ د حـ) = ١٨٠° − (٥٣° + ٧٢°) = ٥٥°

$\therefore \frac{١٧}{جا ٥٥°} = \frac{أحـ}{جا ٥٣°}$ $\therefore$ أحـ ≃ ١٦,٥٧ م

$\therefore$ المسافة بين العلامتين = ١٧ م

② نسقط عمود من حـ على $\overline{أب}$ وليكن $\overline{حـ ء}$



$\therefore$ في △ أحـ ء :

$\frac{حـ ء}{جا ٧٢°} = \frac{١٦,٥٧}{جا ٩٠°}$

$\therefore$ حـ ء ≃ ١٥,٧٦ م

$\therefore$ المسافة بين حافتي الجدول ≃ ١٥,٧٦ م

٣

$(ب حـ)^٢ = (٣٠)^٢ + (٣٠)^٢$

− ٢ (٣٠) (٣٠) جتا ٥٠°



$\therefore$ ب حـ ≃ ٢٥ سم

٤

$(ب حـ)^٢ = (٩٨)^٢ + (٦٤)^٢$

− ٢ (٩٨) (٦٤) جتا ٥٢°



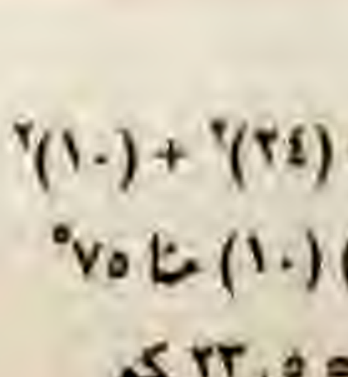
$\therefore$ ب حـ ≃ ٧٧,٣ م

$\therefore$ طول السياج = ٩٨ + ٦٤ + ٧٧,٣ ≃ ٢٣٩ م

٥

$(أب)^٢ = (٢٤)^٢ + (١٠)^٢$

− ٢ (٢٤) (١٠) جتا ٧٥°



$\therefore$ أب ≃ ٢٣,٥ كم

٦

$(أحـ)^٢ = (٩)^٢ + (١٥)^٢ − ٢ (٩) (١٥)$ جتا ١٢٠°

أحـ = ٢١ كم

$\because$ الزمن = $\frac{المسافة}{السرعة}$

، ن$_١$ = $\frac{١٥}{٣٦}$ × ٦٠ = ٢٥ دقيقة.

ن$_٢$ = $\frac{٩}{٣٦}$ × ٦٠ = ١٥ دقيقة.

ن$_٣$ = $\frac{٢١}{٤٢}$ × ٦٠ = ٣٠ دقيقة.

$\therefore$ الزمن الكلي = ٢٥ + ١٥ + ٣٠ = ٧٠ دقيقة.

٧

$\because$ المثمن منتظم

$\therefore$ قياس كل زاوية من زواياه = ١٣٥°

، ق(∠ب ع حـ) = ق(∠ د حـ ع ء) = $\frac{١٣٥°}{٦}$ = ٢٢,٥°

$\therefore (ع ب)^٢ = (٦)^٢ + (٦)^٢ − ٢ (٦) (٦)$ جتا ١٣٥°

$\therefore$ ع ب = ١١,١ متر

، $(ع حـ)^٢ = (١١,١)^٢ + (٦)^٢ − ٢ (١١,١) (٦)$ جتا ١١٢,٥°

$\therefore$ ع حـ = ١٤,٥ متر

، $(ع ء)^٢ = (١٤,٥)^٢ + (٦)^٢ − ٢ (١٤,٥) (٦)$ جتا ٩٠°

$\therefore$ ع ء = ١٥,٧ متر

الجزء الخاص بالإجابات

يصرف مجانًا مع الكتاب



الآن بالمكتبات

المعاصر في:

- تطبيقات الرياضيات (علمي)
- الرياضيات العامة (أدبي)
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

الصف الثاني الثانوي

2

ثانوي

2021

6 223007 310550

/ElMoasser.60

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقي - الفجالة
تليفون ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢ / ٢٢٢
www.elmoasserbooks.com
E-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com